



Università di Pisa

Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

I SISTEMI CINEMATICAMENTE INDETERMINATI: IL CASO DELLE TRAVATURE RETICOLARI PIANE

Tesi di laurea

Relatore:

Prof. Ing. Paolo S. VALVO

Laureanda:

Valentina ANTONIANI

Anno Accademico 2013/2014

INDICE

INDICE	3
INTRODUZIONE	5
Motivazioni: strutture sviluppabili e tensegrali	5
Breve rassegna bibliografica.....	13
Organizzazione della tesi	16
RINGRAZIAMENTI	18
I SISTEMI CINEMATICAMENTE INDETERMINATI: IL CASO DELLE TRAVATURE RETICOLARI PIANE	19
1. L'ANALISI STATICO-CINEMATICA NELL'IPOTESI DI SPOSTAMENTI INFINITESIMI	21
1.1. Concetti di base e definizioni	21
1.1.1. <i>La cinematica dei piccoli spostamenti</i>	23
1.1.2. <i>La matrice cinematica e la matrice statica</i>	25
1.2. Dualità statico-cinematica	31
1.3. Il caso delle travature reticolari	35
2. L'ANALISI STATICO-CINEMATICA NELL'IPOTESI DI SPOSTAMENTI FINITI.....	39
2.1 Una classificazione statico-cinematica	39
2.1.1 <i>Sistemi virtualmente e cinematicamente indeterminati</i>	40
2.2 Configurazioni singolari dei sistemi strutturali sottovincolati.....	41
2.2.1 <i>La realizzabilità fisica dei sistemi strutturali singolari</i>	43
2.2.1.1 Configurazioni “generiche” e “degeneri”	43
2.2.1.2 La stabilità strutturale	43
2.2.1.3 La stabilità dei meccanismi: il ruolo della presollecitazione e dei carichi esterni	47

2.2.1.3.1	<i>Meccanismi infinitesimi del primo ordine</i>	49
2.2.1.3.2	<i>Meccanismi finiti</i>	53
2.3	Cenno ai principali impieghi dei sistemi cinematicamente indeterminati: strutture tensegrali e strutture sviluppabili	54
2.4	La rigidezza statico-cinematica dei sistemi strutturali sottovincolati: la matrice di rigidezza globale	55
3.	ESEMPIO ILLUSTRATIVO: ANALISI DI UNA STRUTTURA RETICOLARE PIANA	59
	BIBLIOGRAFIA	71

INTRODUZIONE

Motivazioni: strutture sviluppabili e tensegrali

Le costruzioni civili (e non solo) affidano il compito di resistere alle azioni esterne (peso proprio, azioni ambientali e di origine antropica, etc.) ad appositi elementi strutturali. L'insieme di questi ultimi costituisce un sistema meccanico (la struttura "portante") che deve avere caratteristiche di resistenza e rigidezza tali da consentire l'assolvimento delle proprie funzioni. In parole povere, i materiali usati non devono "rompersi", ma anche le deformazioni non devono superare certi limiti assegnati. Le strutture "ordinarie" sono, dunque, sistemi meccanici in genere poco deformabili, a parte ciò che deriva dall'inevitabile "elasticità" dei materiali impiegati. In particolare, la "labilità" o "indeterminazione cinematica" (così come l'instabilità dell'equilibrio elastico) sono condizioni dalle quali ogni progettista strutturale deve ben guardarsi, al fine di starne opportunamente lontani.

Ci si potrebbe dunque, a ragione, domandare perché sviluppare una tesi di laurea sull'analisi di sistemi cinematicamente indeterminati ovvero "labili", cioè su quelle che non dovrebbero nemmeno essere considerate "strutture" nel senso stretto del termine. A parte l'interesse teorico per il tema trattato (testimoniato, come vedremo, dalle numerose pubblicazioni scientifiche sull'argomento) e l'ovvia necessità di saper analizzare anche le condizioni indesiderate per l'oggetto della propria progettazione (si potrebbe dire "Per combattere il nemico bisogna conoscerlo"), c'è anche un interesse positivo per questa poco comune classe di sistemi meccanici.

Come vedremo, i sistemi cinematicamente indeterminati si possono suddividere in sistemi presollecitati stabili e meccanismi instabili; infatti, a causa dei meccanismi interni, un sistema cinematicamente indeterminato

non può mantenere uno stato di equilibrio stabile senza introdurre un iniziale stato di presollecitazione. Alla categoria delle strutture presollecitate appartengono le *strutture tensegrali*, mentre i meccanismi instabili, in particolare quelli finiti, possono essere impiegati come *strutture sviluppabili*.

Le strutture sviluppabili hanno un'interessante proprietà: nella loro configurazione originale esse sono incapaci di sostenere carichi a causa della loro indeterminazione cinematica; acquistano rigidità e capacità di sopportare carichi in una configurazione finale abbastanza diversa da quella iniziale. Dunque, una struttura sviluppabile può, per definizione, sopportare spostamenti anche ampi nel passare da una configurazione compatta, “piegata”, a una configurazione “estesa”, sviluppata; il processo è generalmente reversibile.

A titolo di esempio, si consideri la travatura reticolare sviluppabile mostrata in Figura 1. Essa rappresenta una schematizzazione semplificata di una passerella o ponte da utilizzare come opera provvisoria o in situazioni di emergenza. Nella configurazione compatta (a) la struttura si presta bene ad essere trasportata dal luogo di produzione o stoccaggio al sito di impiego. Qui potrebbe essere “sviluppata” (configurazioni intermedie b e c) fino a raggiungere la forma finale (d) (LIGARÒ & VALVO, 2006).

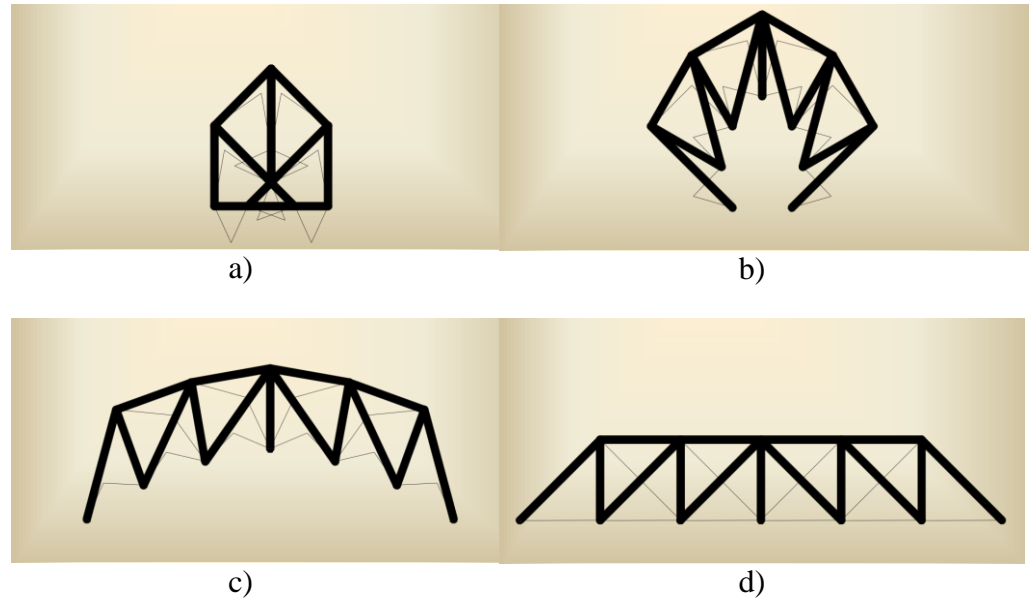


Figura 1. Una travatura sviluppabile: a) configurazione originale; b), c) configurazioni intermedie; d) configurazione finale (sviluppata).

Naturalmente, gli spostamenti cui è sottoposta una struttura sviluppabile sono controllati e indotti dall'azione di una o più fonti esterne. Pertanto, uno dei principali requisiti di una struttura sviluppabile è quello di seguire “percorsi di equilibrio” prestabiliti.

Moltissime strutture utilizzate quotidianamente possono essere classificate come “sviluppabili”; basta pensare alle tende da campeggio e agli ombrelli.

L'esigenza di avere strutture pieghevoli e sviluppabili esiste da molti anni, sin da quando le persone hanno incontrato la necessità di spostarsi da un posto all'altro per trovare condizioni ambientali favorevoli in cui vivere.

Le strutture sviluppabili, infatti, presentano innumerevoli vantaggi: in primo luogo, la loro capacità di ridursi ad una forma più piccola le rende estremamente adatte ad essere trasportate e immagazzinate; inoltre, possono essere facilmente fabbricate e messe in opera, mantenendo i costi piuttosto ridotti.

Queste sono le principali ragioni che rendono tali strutture impiegabili in vari modi, sia in ambito terrestre che spaziale. Infatti, i veicoli di lancio, come gli space shuttles della NASA, hanno dimensioni ridotte, mentre sono richieste strutture piuttosto ampie per diversi scopi nello spazio; tipici esempi sono i satelliti per le comunicazioni e l'osservazione della Terra, nonché i pannelli solari sviluppabili, come quelli del noto Telescopio Spaziale Hubble (CAWSEY, 1982), mostrati in Figura 2:



Figura 2. I pannelli solari del Telescopio Spaziale Hubble durante il dispiegamento.

Innumerevoli sono anche gli usi terrestri di queste strutture; molti esempi si trovano nell'ambito delle costruzioni temporanee, come i rifugi e gli ospedali di emergenza, le coperture temporanee, i padiglioni per le esposizioni. Molto interessanti sono, inoltre, i ponti sviluppabili, in origine impiegati durante la Grande Guerra per risolvere problemi di logistica e trasporto in aree le cui infrastrutture erano state danneggiate. Oggi questi ponti sono stati notevolmente migliorati e vengono utilizzati non solo a scopi militari, ma soprattutto di soccorso; in questo senso, l'uso dei ponti sviluppabili ha visto una recente crescita a causa degli innumerevoli disastri naturali che frequentemente danneggiano o distruggono importanti infrastrutture. Un' altra recente applicazione delle strutture sviluppabili è

costituita da coperture retrattili per ampi stadi sportivi, come nella Amsterdam Arena (Figura 3):

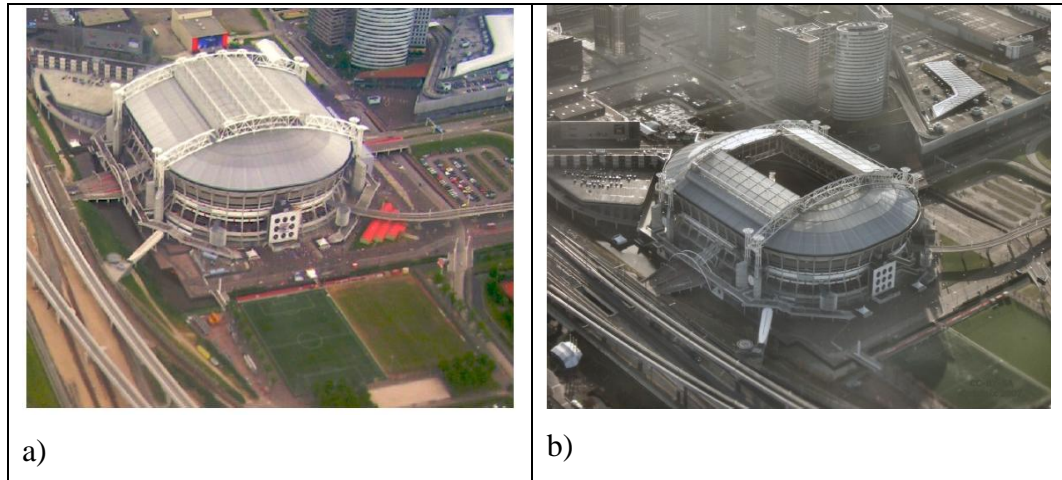


Figura 3. La Amsterdam Arena con la sua copertura retrattile chiusa (a) e aperta (b).

Se le strutture sviluppabili sono spesso visibili e utilizzate nella realtà quotidiana, è difficile intuire il funzionamento e anche solo la configurazione geometrica delle strutture tensegrali semplicemente basandosi sulla loro definizione.

Il nome *tensegrale* deriva dal termine inglese “tensegrity”, coniato nei primi anni '50 da R.BUCKMINSTER FULLER, straordinario architetto, ingegnere e matematico, che ha condotto studi pionieristici in materia. Il termine “tensegrity” è la contrazione dei vocaboli inglesi “tensional” ed “integrity”.

La più recente definizione scientifica di questi sistemi è dovuta a MOTRO (2003): “*si dice tensegrale un sistema in uno stato di auto-equilibrio stabile comprendente una serie discontinua di componenti compressi all'interno di un continuum di componenti tesi*”.

Dunque, le strutture tensegrali sono delle strutture reticolari spaziali in uno stato di presollecitazione, i cui componenti compressi (aste vere e proprie) si collocano all'interno della struttura, mentre gli elementi tesi (cavi) formano una rete ai bordi esterni della struttura stessa.

Come si mostrerà più avanti, con “stato di auto-equilibrio stabile” si vuole indicare che la struttura, prima di essere caricata dalle forze esterne e

dal peso proprio, deve trovarsi in uno stato di presollecitazione affinché tutti i possibili meccanismi indipendenti siano irrigiditi ed essa possa mantenere la sua forma.

In particolare, nel caso delle strutture tensegrali lo stato di presollecitazione viene realizzato attraverso l'allungamento dei puntoni o l'accorciamento dei tiranti. Infatti, se i tiranti sono troppo lunghi o i puntoni troppo corti, il sistema è cinematicamente indeterminato poiché può assumere innumerevoli configurazioni.

Esiste una e una sola lunghezza degli elementi per cui la struttura si ritrova in uno stato di equilibrio con presollecitazione nulla; in questa condizione la struttura è ancora cinematicamente indeterminata, ma ora il meccanismo interno è infinitesimale. Da questo punto in poi se si tenta di accorciare i tiranti o allungare i puntoni, si impone al sistema uno stato di presollecitazione interna che stabilizza la struttura, rendendola capace di sopportare le azioni esterne. Naturalmente, l'intensità di questa presollecitazione non può essere troppo elevata, altrimenti la struttura ha un collasso, per cedimento o dei tiranti o dei puntoni.

Va detto, per inciso, che per trovare lo stato di equilibrio con presollecitazione nulla è necessario risolvere il problema del “*form finding*” (ricerca della forma).

Si guardi, ad esempio, il sistema tensintegro di Figura 4 e si immagini di fissare le lunghezze di tutti gli elementi e di realizzare le connessioni tra di essi.

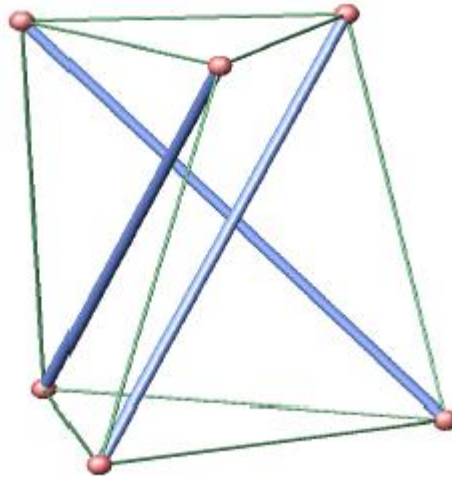


Figura 4. Un sistema tensintegro elementare.

Una volta connessi tutti gli elementi tranne uno, si otterrà un sistema che non ha alcuna rigidezza o consistenza; la lunghezza dell'ultimo elemento viene determinata quando si tenta di avvicinare (se l'elemento è un tirante) o di allontanare (se l'elemento è un puntone) gli ultimi due nodi. La distanza tra questi due nodi può variare fino a raggiungere un minimo (massimo) in corrispondenza del quale la struttura acquisisce una sua consistenza. Se, poi, si forzano i due nodi ad un ulteriore avvicinamento (allontanamento), il sistema acquista uno stato di sollecitazione autoequilibrato negli elementi.

Volendo chiarire ulteriormente il principio meccanico su cui si basa una struttura tensegrale, si può ricorrere all'analogia del "pallone" proposta da PUGH (1976). Se il pallone è sgonfio, non possiede alcuna forma particolare, o, meglio, se sollecitato da forze esterne può assumere numerose forme, per cui si può affermare che esso si trova in uno stato instabile. Se, invece, il pallone viene gonfiato con più aria di quella strettamente pari al volume del pallone, si genera una pressione interna che può essere vista come una forza costante di compressione che agisce sulle pareti del pallone, le quali, a loro volta, per resistere si trovano in uno stato di tensione (Figura 5).

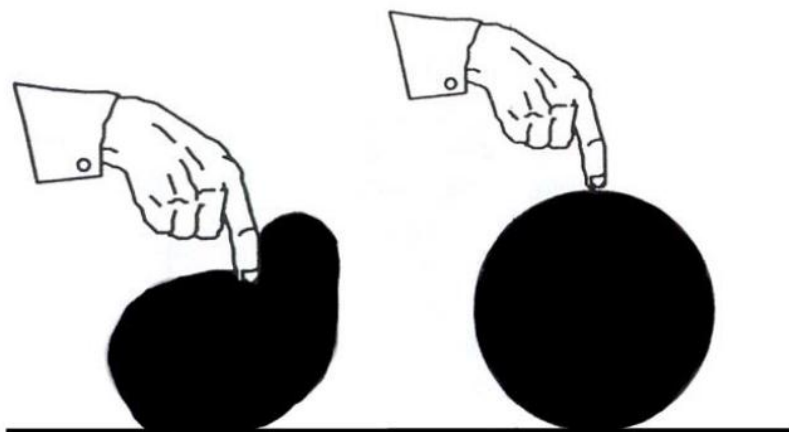


Figura 5. Concetto di pre-sollecitazione: analogia del “pallone”, A. Pugh (1976).

In una struttura tensegrale si può, pertanto, dire che i puntoni svolgono la stessa funzione dell’aria compressa nel pallone e i tiranti quello delle pareti del pallone stesso.

Affascinanti esempi di strutture tensegrali sono le sculture di SNELSON (2004), come quella di Figura 6.



Figura 6. “Dragon” , K.Snelson (2000-2003).

Nonostante siano trascorsi diversi decenni da quando il concetto di *tensegrità* ha visto la luce, le strutture tensegrali sono rimaste, purtroppo, per molto tempo relegate al mondo virtuale o artistico, principalmente per la complessità che avrebbe richiesto una loro trattazione.

Oggi gli innumerevoli progressi ingegneristico-matematici hanno permesso lo sviluppo di affidabili sistemi di analisi geometrica e statica per le strutture tensegrali; tuttavia, l'approccio progettuale a questi sistemi è ancora di nicchia, ma, se implementato, consentirebbe di concretizzare intuizioni rimaste ancora sulla carta, nonché di ipotizzare nuovi ambiti d'uso per queste strutture.

In ambito strutturale, interessanti sono i sistemi “monocomponente” che sembrano trovare naturale utilizzo nella realizzazione di passerelle e ponti pedonali, come si vede nel prototipo di Figura 7:

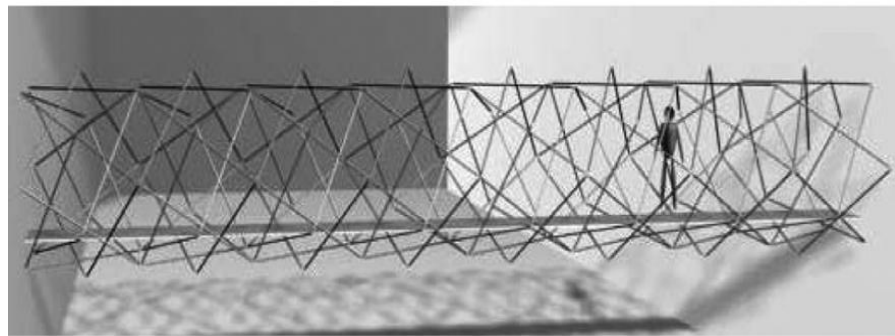


Figura 7. prototipo di un ponte pedonale, tratto da R. Motro (2003).

Gli ambiti di investigazione dei sistemi tensegrali, tuttavia, non si limitano soltanto all'ingegneria strutturale, l'architettura e il design, ma si estendono all'arte, alla matematica, alla robotica, alla biologia e alla medicina; infatti, i sistemi tensegrali sono stati utilizzati anche per studiare il comportamento della colonna vertebrale e altre parti del corpo umano.

Breve rassegna bibliografica

Il concetto di indeterminazione cinematica è fondamentale al fine di comprendere adeguatamente la meccanica strutturale di qualsiasi sistema, in particolare delle travature reticolari.

Il primo ad occuparsi direttamente dell'argomento fu MÖEBIUS (1837) il quale mostrò che, affinché una struttura reticolare composta da j nodi sia rigida, deve possedere almeno $(2j - 3)$ aste se è contenuta in un piano, $(3j - 6)$ aste se è spaziale. Egli era, tuttavia, consapevole

dell'esistenza di eccezioni alla sua regola ed aveva, inoltre, osservato che la rimozione di un'asta da un sistema, con il minimo numero di aste necessario a renderlo rigido, trasforma il sistema in un meccanismo finito.

Qualche decennio più tardi MAXWELL (1890) rivisitò la regola di MÖEBIUS, estendendola al caso dei sistemi vincolati, tanto che oggi essa è maggiormente nota come *regola di Maxwell*. Inoltre, anche MAXWELL sapeva dell'esistenza di sistemi che, pur soddisfacendo la sua regola, non sono "rigidi" e associava queste eccezioni a condizioni di massima e minima lunghezza degli elementi che li costituiscono.

Più tardi KÖTTER (1912) presentò il primo studio interamente concentrato sull'indeterminazione statica e cinematica delle travi reticolari. Egli, inoltre, introdusse un procedimento analitico, tuttavia scomodo e macchinoso, per valutare quando una struttura piana con $b < 2j - 3$ è rigida.

I successivi progressi sull'investigazione dei meccanismi furono molto lenti e, solo nella seconda metà del secolo scorso, questi sistemi sono diventati oggetto di un numero sempre più elevato di ricerche.

Da allora, infatti, molti autori si sono occupati di meccanismi, soprattutto di quelli infinitesimi del primo ordine; tra questi TARNAI (1980) che mostrò esempi di travi reticolari, in particolare quelle con simmetria ciclica e cilindrica, che, pur soddisfacendo la *regola di Maxwell*, sono risultate cinematicamente e staticamente indeterminate allo stesso tempo. TARNAI, inoltre, conoscendo gli studi di FULLER (1962) sulle strutture tensegrali, si chiese se anche i meccanismi finiti, come le travi a simmetria cilindrica da lui studiate, potessero essere irrigiditi attraverso la presollecitazione ma concluse con una risposta negativa.

Più tardi, PELLEGRINO & CALLADINE (1986) estesero la *regola di Maxwell*, introducendo una relazione generale che coinvolgesse anche i gradi di indeterminazione statica (i) e di labilità (l) del sistema. Inoltre, essi si occuparono a fondo dei meccanismi infinitesimi, soprattutto di quelli del primo ordine (1991), dimostrando analiticamente la congettura di TARNAI:

solo questi meccanismi, come le strutture tensegrali, possono essere irrigiditi da un stato di presollecitazione. PELLEGRINO & CALLADINE (1986), inoltre, fornirono importanti basi per un'analisi algebrica lineare delle strutture.

KUZNETSOV è stato uno dei più eminenti autori ad occuparsi dei sistemi cinematicamente indeterminati; egli studiò ampiamente i sistemi strutturali sottovincolati (1991) sotto diversi aspetti, illustrandone varie applicazioni, come i sistemi di cavi e reti. KUZNETSOV si concentrò, inoltre, su quelle configurazioni allo stesso tempo cinematicamente e staticamente indeterminate, le cosiddette configurazioni *singolari* (1999). A tal proposito, KUZNETSOV (2000) indagò sulla possibilità che tali configurazioni potessero essere realizzate fisicamente, dimostrando che ciò è possibile solo per quelle configurazioni strutturalmente stabili, ad esempio i meccanismi infinitesimi che ammettono uno stato di presollecitazione stabile, in accordo con gli studi già citati di TARNAI, PELLEGRINO & CALLADINE.

La stabilità dei meccanismi è stata ampiamente trattata anche da altri importanti autori; DENG & KWAN (2005), ad esempio, misero in luce tutti i fattori che influenzano la stabilità strutturale e fornirono una classificazione organica dei sistemi reticolari basata su criteri energetici e sull'analisi della matrice di rigidezza tangente. Più recentemente, CHEN *et al.* (2014) hanno illustrato una condizione necessaria di stabilità delle strutture cinematicamente indeterminate con simmetria; tale condizione deriva dalla definizione positiva della forma quadratica della matrice di rigidezza tangente.

Con questa breve rassegna bibliografica si è voluto mettere in luce, almeno a grandi linee, come l'interesse verso i meccanismi ha subito, negli ultimi decenni, un notevole incremento; ciò, come si è detto nella parte introduttiva, è dovuto principalmente alla messa a punto di sistemi di analisi sempre più robusti e alla comparsa di materiali ad alta resistenza, dai quali i sistemi cinematicamente indeterminati traggono i maggiori benefici. Uno

degli studi più completi, che evidenzia questo crescente interesse verso i meccanismi, si può trovare nel volume di RABINOVICH (1962).

Organizzazione della tesi

La presente tesi è divisa in tre capitoli. Nel primo capitolo verranno presentate l'analisi statica e l'analisi cinematica dei sistemi strutturali, così come tradizionalmente trattate nell'ambito della meccanica strutturale. A tal fine, in primo luogo verranno introdotti importanti concetti basilari, a partire da quello di gradi di libertà e di vincolo di un sistema, sia esso un punto materiale o un insieme di travi. In particolare, si farà riferimento all'attitudine di un sistema vincolato a compiere spostamenti infinitesimi, ipotesi che permetterà di formulare sia il problema statico che il problema cinematico in forma matriciale, introducendo la *matrice statica* e la *matrice cinematica*. Verrà, dunque, mostrato come i problemi statico e cinematico siano legati da un'intrinseca dualità e come l'analisi delle matrici statica e cinematica consentirà, sulla scorta del Teorema di Rouchè – Capelli, di operare una classificazione statico- cinematica dei sistemi. A conclusione del capitolo, si mostrerà come l'analisi statico-cinematica si semplifichi per le travature reticolari.

Nel secondo capitolo si farà riferimento ai sistemi strutturali sottovincolati, distinguendoli in *meccanismi infinitesimi* (del primo ordine o di ordine superiore) e in *meccanismi finiti*; si generalizzerà, dunque, l'analisi cinematica al caso in cui gli spostamenti non possono essere considerati infinitesimi. Particolare attenzione si porrà alle configurazioni *singolari* dei sistemi strutturali sottovincolati, ovvero a quelle configurazioni caratterizzate da una carenza nel rango delle matrici statica e cinematica. Si analizzerà il problema della realizzabilità fisica di tali configurazioni, mostrando come essa sia indissolubilmente connessa al concetto di *stabilità strutturale*. Si dimostrerà, quindi, che i meccanismi infinitesimi del primo ordine sono gli unici, tra i sistemi strutturali singolari, a poter essere

fisicamente realizzati se sottoposti a uno stato di presollecitazione stabile. Tutte le altre configurazioni singolari sono instabili, dunque irrealizzabili e restano solo costrutti formali. Infine, verrà introdotta la *matrice di rigidezza statico- cinematica* che dimostra come anche i sistemi sottovincolati, contrariamente a quanto ci si aspetterebbe dalla teoria dell'elasticità lineare, presentano una fonte di rigidezza che consente loro di resistere ai carichi cui vengono sottoposti.

Nel terzo capitolo si esaminerà un esempio di struttura reticolare singolare, facendone l'analisi statico-cinematica; ciò permetterà di evidenziare importanti concetti visti in precedenza, come la proprietà dei sistemi singolari di ammettere uno stato di presollecitazione, e di mettere in luce il significato fisico dei quattro spazi vettoriali associati alle matrici statica e cinematica.

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare coloro che hanno contribuito, in un modo o nell'altro, alla stesura di questo piccolo lavoro.

Innanzitutto il mio relatore, il professor Valvo, che mi ha dato la possibilità di trattare una tematica interessante e stimolante ed ha pazientemente revisionato il mio lavoro, chiarendo di volta in volta i miei dubbi con disponibilità e cortesia, nonostante la lontananza fisica lo rendesse difficile.

La mia più profonda gratitudine va ai miei genitori che, con la loro inesauribile pazienza, sono sempre stati per me un punto di riferimento e una fonte di preziosi consigli e di incrollabile sostegno; spero di non deludere mai la fiducia incondizionata che hanno sempre riposto in me e di dimostrare loro, giorno dopo giorno, tutto il mio affetto e la mia riconoscenza che è riduttivo esprimere in poche righe.

Voglio rivolgere un ringraziamento speciale anche a mia sorella, Cristiana, con la quale condivido il mondo da sempre, costantemente pronta ad ascoltarmi e smorzare i miei picchi di nervosismo.

Un enorme grazie va a Michele, mio dolce compagno di vita, che ha sempre camminato al mio fianco, condividendo le mie ansie, le mie gioie e ogni mio progetto.

Ringrazio, infine, amici, colleghi e docenti che continuamente mi offrono spunti di riflessione e accrescono la mia voglia di imparare.

I SISTEMI CINEMATICAMENTE INDETERMINATI: IL CASO DELLE TRAVATURE RETICOLARI PIANE

“Poca favilla gran fiamma seconda”

[Dante Alighieri – Par, I, 34.]

1.

L'ANALISI STATICO-CINEMATICA NELL'IPOTESI DI SPOSTAMENTI INFINITESIMI

1.1. Concetti di base e definizioni

I problemi dell'analisi strutturale si possono suddividere in due categorie: problemi cinematici e problemi statici. I corrispondenti metodi di soluzione fanno capo, rispettivamente, all'analisi cinematica e all'analisi statica. I due aspetti, peraltro, non sono fra loro slegati. Al contrario, come si vedrà, danno luogo ad una interessante dualità. Pertanto, nonostante la presente tesi sia focalizzata sull'analisi cinematica, nel seguito si farà inevitabilmente riferimento anche all'analisi statica dei sistemi strutturali considerati.

In questo primo capitolo, l'attenzione è posta al caso dei sistemi soggetti a spostamenti infinitesimi. La trattazione che ne deriva è un argomento classico della meccanica delle strutture, che si trova esposto nei principali libri di testo sull'argomento (vedi, ad esempio, BOSCOTRECASE e DI TOMMASO, 1976; NUNZIANTE, GAMBAROTTA E TRALLI, 2011).

L'analisi cinematica si occupa essenzialmente di verificare se, fissata una configurazione iniziale (di riferimento) del sistema materiale preso in esame, esista o meno la possibilità di spostamenti, ovvero esistano una o più configurazioni diverse, ottenute da quella iniziale attraverso variazioni (finite o infinitesime) delle coordinate di ciascun punto del sistema stesso.

L'analisi statica, invece, si occupa di verificare se in una data configurazione sia possibile o meno l'equilibrio per il sistema considerato e di ricercare, in tal caso, le reazioni vincolari e le interazioni (“caratteristiche della sollecitazione”) che soddisfano tale equilibrio.

Per “sistema materiale”, in questo contesto, si intende il punto materiale o il corpo rigido o insiemi di punti materiali e/o corpi rigidi (che, in generale, verranno chiamati “elementi”) connessi tra loro e vincolati al suolo; se ciascuno di questi corpi risponde alla definizione di “trave”, allora il sistema in questione è detto “sistema di travi” ed è quello cui maggiormente si farà riferimento nel seguito.

La posizione di un singolo punto materiale nello spazio è descritta dalle coordinate x, y, z del punto rispetto ad una data terna cartesiana di riferimento. Se tali coordinate possono variare liberamente in una certa regione di spazio, si dice che il punto possiede 3 gradi di libertà nella regione considerata; ciò sta a significare che il moto del punto è caratterizzato da 3 parametri cinematici. Allo stesso modo, un sistema costituito da n punti materiali possiede $3n$ gradi di libertà nello spazio; pertanto, per tale sistema sono presenti ∞^{3n} configurazioni possibili.

Il discorso si estende facilmente al corpo rigido, essendo questo costituito da infiniti punti collegati tra loro in modo che si mantengano costanti le mutue distanze tra una qualsiasi coppia di tali punti. Si deduce, pertanto, che la posizione di un corpo rigido, rispetto ad una terna fissa di riferimento, è individuata se si conoscono le 3 coordinate di un qualsiasi punto O' appartenente al corpo stesso e i tre angoli φ, θ, ψ (*angoli di Eulero*) che gli assi di una terna mobile (solidale con il corpo) con origine in O' formano con la terna fissa; di conseguenza, un corpo rigido nello spazio presenta 6 gradi di libertà.

Un ragionamento analogo si può applicare al caso in cui tutti i punti del sistema siano contenuti in un piano; così, un punto materiale nel piano presenta 2 soli gradi di libertà (corrispondenti alle coordinate x, y del punto rispetto agli assi cartesiani di riferimento) e un corpo rigido nel piano presenta 3 gradi di libertà; infatti, per individuarne la posizione è sufficiente conoscere le coordinate dell'origine O' di una coppia di assi solidale al corpo e l'angolo formato da tali assi con gli assi del riferimento fisso.

Spesso, tuttavia, accade che il sistema considerato non sia libero nello spazio ovvero nel piano ma presenti degli impedimenti alla mobilità; tali impedimenti sono detti “vincoli” e, analiticamente, corrispondono a relazioni che le coordinate dei punti del sistema devono soddisfare. Dal punto di vista cinematico, quindi, i vincoli vengono classificati in base alla loro *molteplicità*, ovvero al numero di componenti di spostamento che essi vincolano o, equivalentemente, al numero di gradi di libertà che ciascuno di essi sopprime al sistema vincolato. In questo senso, nello spazio possono aversi vincoli di molteplicità 1, 2, ... fino a 6; nel piano i vincoli si diranno *semplici*, *doppi* o *tripli* a seconda che essi limitino una, due o tre componenti di spostamento. Dal punto di vista statico, invece, ad ogni componente di spostamento impedita da un vincolo corrisponde un'azione (*reazione vincolare*) esplicata dal vincolo stesso sul sistema vincolato.

Di notevole interesse sono i vincoli *olonomi*, *fissi*, *bilaterali* e *lisci*; i vincoli si definiscono *olonomi* quando impongono restrizioni alla sola posizione degli elementi, introducendo legami tra le coordinate dei punti vincolati e non, ad esempio, tra le loro derivate rispetto alle coordinate spaziali o al tempo; sono detti *fissi* se le loro prestazioni sono indipendenti dal tempo; sono definiti *bilaterali* nel caso in cui il loro effetto vale per spostamenti che avvengono in un verso quanto in quello opposto; infine, si dicono *lisci* i vincoli privi di attrito, ovvero in grado di fornire una forza reattiva solo nella direzione dello spostamento vincolato.

I vincoli si dicono, inoltre, esterni se limitano gli spostamenti assoluti, interni (o *connessioni*) se limitano gli spostamenti relativi tra le parti di un sistema.

1.1.1. La cinematica dei piccoli spostamenti

Si è già detto che, dal punto di vista analitico, i vincoli corrispondono a relazioni cui devono sottostare le coordinate dei punti del sistema vincolato; in altre parole, i vincoli costringono i punti a spostarsi solo su determinate superfici (nel caso di moto nello spazio) ovvero su determinate curve (nel

caso di moto piano). Quanto detto non pone alcuna restrizione sull'ampiezza degli spostamenti vincolati.

Tuttavia, in molti i problemi che interessano l'analisi strutturale è sufficiente considerare solo *spostamenti infinitesimi*, ossia piccole variazioni delle coordinate dei punti computate a partire da una data *configurazione di riferimento*. Infatti, individuare solo le eventuali possibilità di spostamenti infinitesimi è sufficiente per giudicare la disponibilità di un sistema ad abbandonare la sua configurazione iniziale. Questo consente di sostituire alle superfici (ovvero alle curve) dette prima i rispettivi piani tangenti (ovvero le rispettive rette tangenti) in corrispondenza dei punti della configurazione iniziale di riferimento. In questo modo, le equazioni, generalmente, non lineari che rappresentano le condizioni di vincolo diventano legami di tipo lineare (equazioni dei piani tangenti ovvero delle rette tangenti), cui devono obbedire le coordinate dei punti del sistema.

Volendo precisare il concetto di *spostamento infinitesimo*, si consideri un punto materiale P , la cui posizione nello spazio è individuata dalle tre coordinate cartesiane x_P, y_P, z_P nella configurazione iniziale C_0 ; in una configurazione C infinitamente prossima a C_0 , la nuova posizione del punto materiale sarà data dalle coordinate $x_P + d x_P, y_P + d y_P, z_P + d z_P$. Le quantità $d x_P, d y_P, d z_P$ rappresentano, quindi, le componenti cartesiane del vettore spostamento δP .

Allo stesso modo può essere esplicitato lo spostamento infinitesimo nel caso di corpo rigido nello spazio; esso, infatti, sarà composto da sei componenti: tre traslazioni $d x, d y, d z$ nella direzione degli assi x, y, z e tre rotazioni attorno alle rette x', y', z' parallele agli assi coordinati e passanti per un punto qualsiasi del corpo rigido.

Nel caso di corpo rigido nel piano, invece, tutti i punti del corpo possono, per definizione, spostarsi solo parallelamente ad uno stesso piano. Se si fa coincidere tale piano con il piano x,y , si può concludere che un generico spostamento piano infinitesimo di un corpo rigido è composto da una traslazione e da una rotazione rigida attorno ad un asse generico del

corpo, la cui traccia sul piano x,y è un punto detto *centro assoluto di rotazione*.

In generale, uno spostamento si definisce *rigido* se la lunghezza di una generica linea congiungente una qualsiasi coppia di punti del corpo resta invariata nel passare da una configurazione ad un'altra.

Sotto l'ipotesi di spostamenti infinitesimi, quindi, è possibile linearizzare l'analisi del sistema nell'intorno della configurazione iniziale, ovvero di impostare una trattazione in forma matriciale del problema, come si vedrà nel seguito.

1.1.2. La matrice cinematica e la matrice statica

Si consideri un sistema piano di n travi collegate tra loro mediante connessioni interne e dotato di vincoli esterni. Ai fini della valutazione dell'equilibrio e dell'eventualità di cinematismi, il sistema può essere visto come un insieme di elementi (travi) rigidi.

In base a quanto detto sopra, ciascuna trave possiede nel piano 3 gradi di libertà; dunque, se non ci fossero vincoli esterni e connessioni, il sistema presenterebbe $3n$ gradi di libertà per cui il suo moto potrebbe essere descritto da $3n$ parametri cinematici. Tuttavia, la presenza dei vincoli toglie al sistema m gradi di libertà, dove m è la somma di tutte le molteplicità dei vincoli presenti.

Si vuole valutare l'attitudine del sistema a compiere spostamenti infinitesimi a partire da una configurazione di riferimento C_0 , ovvero fare l'analisi cinematica del sistema in esame. Occorre, quindi, analizzare le prestazioni cinematiche dei vincoli presenti, ovvero scrivere le m condizioni di compatibilità che esprimono le restrizioni che i vincoli impongono agli spostamenti dei punti vincolati. Per l'ipotesi di spostamenti infinitesimi, ciascuna condizione di vincolo si riduce a un'equazione lineare, per cui in totale si otterrà un sistema di m equazioni nelle $3n$ incognite date dai parametri cinematici.

In generale, se si indica con \mathbf{u} il vettore che ha per componenti i parametri cinematici del sistema e con \mathbf{d} il vettore degli eventuali cedimenti assegnati ai vincoli, il sistema delle m condizioni di vincolo si può scrivere in forma matriciale come segue:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{d} \quad (1.1)$$

dove \mathbf{C} è la matrice ($m \times 3n$) dei coefficienti del sistema, detta *matrice cinematica*.

Si immagini, quindi, di voler fare l'analisi statica dello stesso sistema; essa consiste, essenzialmente, nel verificare se, dato un certo insieme di forze attive generalizzate (forze o coppie) agenti sul sistema, esista o meno la possibilità di trovare uno o più insiemi di reazioni vincolari che garantiscano l'equilibrio.

Nel caso di un corpo rigido, è noto che condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia in equilibrio è che il sistema di forze ad esso applicato sia equivalente a un sistema nullo. Analiticamente, questa condizione equivale a soddisfare le *equazioni cardinali della statica*:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

dove con \mathbf{R} è il risultante delle forze applicate ed \mathbf{M} è il risultante dei momenti rispetto a un polo arbitrario.

Volendo estendere il discorso a un sistema di travi, esso si dirà in equilibrio in un'assegnata configurazione geometrica se lo sono tutte le sue parti singolarmente; pertanto, il problema dell'equilibrio statico di un sistema di travi può essere ricondotto al problema dell'equilibrio statico di ogni sua trave. In questo senso, nelle equazioni di equilibrio intervengono non solo le forze (e le coppie) esterne agenti sul sistema, ma anche le azioni interne che le varie parti si scambiano tra loro.

Scrivendo le equazioni cardinali della statica per ciascun elemento trave si perviene ad un sistema lineare di $3n$ equazioni (3 equazioni per ciascun elemento del sistema) nelle m incognite (tante quante la molteplicità complessiva dei vincoli presenti) connesse alle forze reattive dei vincoli:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (1.4)$$

dove \mathbf{x} è il vettore delle m incognite statiche, \mathbf{p} è il vettore dei carichi esterni applicati ed \mathbf{S} è la matrice ($3n \times m$) dei coefficienti del sistema, detta *matrice statica* o *matrice di equilibrio*.

È opportuno precisare che l'ipotesi di piccoli spostamenti consente di scrivere le equazioni di equilibrio nella configurazione iniziale, non deformata, del sistema.

Per chiarire quanto detto, si veda, ad esempio, il sistema in Figura 5:

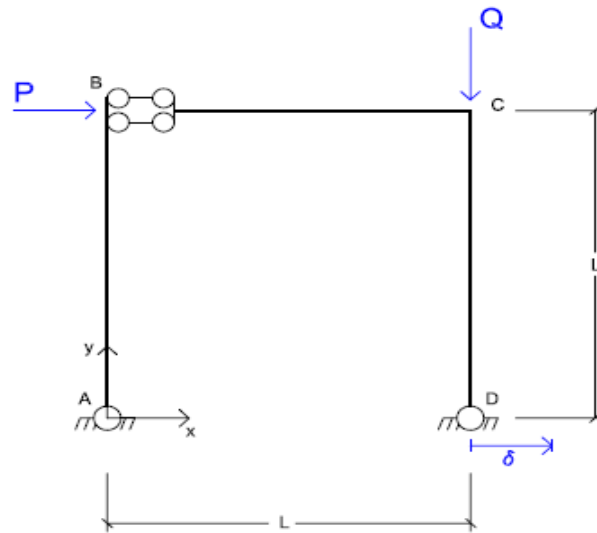


Figura 5. Telaio piano.

Il sistema è costituito da tre travi, AB, BC e CD; tuttavia, le travi BC e CD costituiscono un unico corpo rigido, per cui il sistema presenta $3n = 6$ gradi di libertà nel piano che lo contiene.

Ci sono, inoltre, tre vincoli: due esterni che collegano la struttura al suolo rispettivamente nei punti A e D, e uno interno che funge da connessione tra le due travi nel vertice B. I vincoli in A e D sono detti *cerniere piane* e impediscono le traslazioni sia nella direzione x che nella direzione y ; tuttavia, in questo caso la cerniera in D impone una traslazione in direzione x di entità assegnata δ (*cedimento vincolare*). Le cerniere lasciano, invece, gli elementi vincolati liberi di rotare attorno ad un asse ortogonale al piano contenente il sistema; pertanto, esse sono *vincoli doppi* e

ciascuna di esse esplica una reazione vincolare che può vedersi scomposta in due componenti, rispettivamente in direzione x e in direzione y . La connessione in B è, invece, detta *bipendolo* e anch'essa possiede molteplicità 2, in quanto consente soltanto la traslazione in direzione y .

In base a quanto detto, il sistema presenta, allora, $m = 2 \bullet 3 = 6$ molteplicità di vincolo.

Di seguito saranno svolte, nell'ordine, l'analisi cinematica e l'analisi statica del sistema in esame. A tal fine, come si vedrà meglio più avanti, è lecito supporre che ciascuna delle due parti, AB e la BCD , sia rigida.

In base a quanto detto, se si indicano con u_A e v_A rispettivamente le componenti nelle direzioni x e y dello spostamento del punto A , la compatibilità con la cerniera in A si traduce delle seguenti equazioni:

$$u_A = 0 \quad (1.5)$$

$$v_A = 0 \quad (1.6)$$

Allo stesso modo si possono scrivere le relazioni di compatibilità con la cerniera in D , con la differenza che questa è cedevole:

$$u_D = \delta \quad (1.7)$$

$$v_D = 0 \quad (1.8)$$

Inoltre, deve essere rispettata la compatibilità con il vincolo interno in B ; infatti, la presenza di tale connessione fa sì che si abbia:

$$\mathbf{u}_B^{AB} = \mathbf{u}_B^{BCD} \quad (1.9)$$

$$\theta_{AB} = \theta_{BCD} \quad (1.10)$$

Nella (1.10) θ_{AB} e θ_{BCD} sono rispettivamente le rotazioni compiute da ciascun punto delle travi AB e BCD .

La (1.9) indica che, non potendo per ipotesi esserci distacchi né compenetrazioni di materia, lo spostamento nella sezione B è lo stesso sia che venga calcolato con riferimento alla trave AB , sia che venga calcolato con riferimento alla trave BCD . In particolare, avendo ipotizzato ciascuna trave rigida, ciascuno spostamento può essere scritto attraverso le note relazioni della cinematica rigida, per cui:

$$\mathbf{u}_B^{AB} = \mathbf{u}_A + \theta_{AB} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{u}_B^{BCD} = \mathbf{u}_D + \theta_{BCD} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{D}) \quad (1.12)$$

Qui $(\mathbf{B} - \mathbf{A})$ e $(\mathbf{B} - \mathbf{D})$ rappresentano le distanze tra i punti B e A e B e D rispettivamente, ovvero:

$$(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = L\mathbf{i} \quad (1.13)$$

$$(\mathbf{B} - \mathbf{D}) = L(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (1.14)$$

Pertanto, tenendo conto delle precedenti formule, la prima componente della (1.9) può essere riscritta come segue:

$$u_A - \theta_{AB} L = u_D - \theta_{BCD} L \quad (1.15)$$

A questo punto, è possibile scrivere le equazioni di compatibilità cinematica (1.5), (1.6), (1.15), (1.10), (1.7) e (1.8) in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -L & -1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_{AB} \\ u_D \\ v_D \\ \theta_{BCD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

La matrice $(m \times 3n)$ dei coefficienti del sistema è, quindi, la *matrice cinematica* cercata, che mette in relazione il vettore dei parametri cinematici del sistema con quello dei cedimenti vincolari.

Volendo, ora, procedere con l'analisi statica del sistema, sostituiamo ciascun vincolo con le reazioni da esso esplicate, come mostrato in Figura 6.

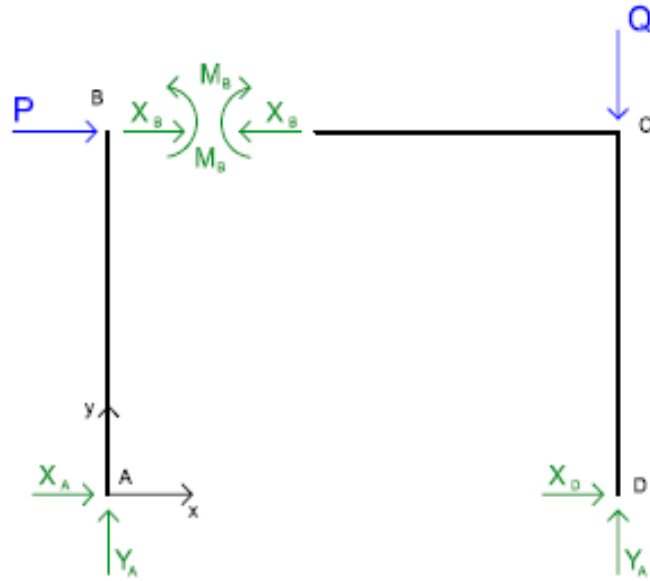


Figura 6. Telaio piano: vincoli sostituiti con le corrispondenti reazioni vincolari.

Poiché il sistema è in equilibrio se lo sono tutte le sue parti separatamente, si possono scrivere le equazioni della statica per ciascuna trave; in particolare, per la trave AB :

$$X_A + X_B = -P \quad (1.17)$$

$$Y_A = 0 \quad (1.18)$$

$$-X_B L + M_B = PL \quad (1.19)$$

Le equazioni (1.17), (1.18) e (1.19) sono, nell'ordine, l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale e l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto A .

Analogamente, possono essere scritte le equazioni di equilibrio per la trave BCD :

$$X_D - X_B = 0 \quad (1.20)$$

$$Y_D = Q \quad (1.21)$$

$$X_B L - M_B = 0 \quad (1.22)$$

Riscrivendo le precedenti 6 equazioni di equilibrio in forma matriciale, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ M_B \\ X_D \\ Y_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ PL \\ 0 \\ Q \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

Nel sistema (1.23) la matrice ($3n \times m$) dei coefficienti è la *matrice statica* del telaio in esame; essa mette in relazione il vettore delle incognite statiche con il vettore dei carichi esterni.

1.2. Dualità statico-cinematica

La risoluzione del problema statico e del problema cinematico, dunque, consiste nella risoluzione di due sistemi lineari di equazioni; a tal fine, si ricorda che il teorema di Rouché–Capelli stabilisce che un sistema lineare ammette soluzioni se, e soltanto se, il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa, ottenuta dalla matrice dei coefficienti aggiungendovi una colonna costituita dai termini noti del sistema. Se questa condizione è verificata il sistema avrà soluzione unica o sarà indeterminato, rispettivamente quando il numero delle incognite è uguale o superiore al rango.

Assumendo tutti i vincoli indipendenti tra loro, i risultati del problema cinematico possono essere riassunti in tre casi:

- a) $3n > m$: il numero delle incognite supera il numero di equazioni indipendenti. Il sistema è *cinematicamente indeterminato* o *labile*: i vincoli lasciano al sistema $l = 3n - m$ possibilità di spostamento, dove l è il *grado di labilità* del sistema;

- b) $3n = m$: il sistema è *cinematicamente determinato*. Ciò vuol dire che la matrice \mathbf{C} è quadrata e ha rango massimo; il sistema ammette soluzione unica in termini cinematici: nel caso di cedimenti vincolari nulli tale soluzione coincide evidentemente con quella banale, per cui il sistema non lascerà la configurazione iniziale di riferimento; se sono presenti, invece, cedimenti vincolari è sempre possibile per il sistema una nuova configurazione cinematicamente ammissibile;
- c) $3n < m$: il sistema ha una molteplicità di vincolo sovrabbondante. La soluzione è unica (sistema *cinematicamente determinato*) e coincide con quella banale se sono assenti cedimenti vincolari; il problema è, invece, generalmente *cinematicamente impossibile* nel caso contrario, perché la ridondanza di vincoli indipendenti non consente movimenti atti a conformarsi alla condizione di vincolo cedevole.

Occorre precisare, tuttavia, che quanto appena detto è valido nel caso in cui i vincoli siano “ben posti”, ovvero indipendenti tra loro. Tuttavia, può accadere anche che alcuni dei vincoli siano inefficaci a garantire l’equilibrio; ciò accade quando le reazioni vincolari sono convergenti in un punto proprio o improprio nel piano delle forze. Dal punto di vista algebrico questa condizione comporta la presenza di alcune equazioni vincolari linearmente dipendenti tali da rendere nullo il determinante della matrice cinematica \mathbf{C} .

Dell’efficacia dei vincoli si occupa l’analisi statica; considerando, a tal proposito, il sistema (1.4), possono presentarsi i seguenti casi:

- 1) $m > 3n$: il sistema contiene più incognite che equazioni, ovvero sono presenti $i = 3n - m$ vincoli sovrabbondanti; il sistema è detto *iperstatico* con *grado di iperstaticità* i . In questi casi, le equazioni della statica non sono sufficienti a

determinare univocamente le incognite; l'unica soluzione tra le infinite possibili viene trovata rimuovendo l'ipotesi di travi rigide (*teoria dell'elasticità*).

- 2) $m = 3n$: la soluzione esiste ed è unica; il sistema si dice *isostatico* o *staticamente determinato*: per qualsiasi valore dei carichi esterni è possibile trovare reazioni vincolari che rendono equilibrato il sistema.
- 3) $m < 3n$: il sistema è *labile* ed il problema in generale è *staticamente impossibile*; sarà possibile solo per particolari condizioni di carico esterne per le quali si verifica che il rango della matrice completa e quello della matrice incompleta siano uguali a m .

È opportuno precisare che se alcuni vincoli risultano inefficaci, nel caso 2) la struttura può risultare solo *apparentemente isostatica* ma, in effetti, è labile. Allora, in generale l'equilibrio è impossibile, a parte in casi particolari, come spiegato nel caso 3). Se, però, come spesso accade, il rango della matrice completa, pur essendo uguale a quello della matrice incompleta, è inferiore al numero delle incognite, il problema è staticamente indeterminato; quindi, ancora una volta le equazioni della statica non sono sufficienti a determinare la soluzione unica del problema fisico. È chiaro, quindi, che in presenza di vincoli dipendenti è possibile far rientrare il problema nei casi 1) o 2) o 3) considerando, di volta in volta, il rango della matrice completa e incompleta ed applicando il teorema di Rouché–Capelli.

Finora i problemi statico e cinematico sono stati trattati separatamente; tuttavia, come mostra l'esempio precedente, essi sono strettamente legati. Infatti, confrontando la matrice cinematica e la matrice statica è facile constatare che esse sono una la trasposta dell'altra:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^T \quad (1.24)$$

Di conseguenza, la matrice statica e la matrice cinematica hanno il medesimo rango r .

Questo risultato può essere dimostrato facilmente applicando il *principio dei lavori virtuali*; esso ha carattere del tutto generale, purché si assuma lo stesso riferimento nei due problemi, mantenendo lo stesso ordine delle incognite e scegliendo, come incognite cinematiche, spostamenti positivi se concordi con le incognite statiche.

Alla luce della *dualità* appena evidenziata, si possono riesaminare i casi sopra descritti, tenendo conto della caratterizzazione sia cinematica che statica del sistema:

- i. $3n > m$ e $r = m$: nonostante i vincoli siano ben posti, essi sono insufficienti a eliminare cinematismi, per cui il problema cinematico ammette ∞^l soluzioni, dove $l = 3n - m$ è il *grado di labilità* del sistema. In termini statici, il problema è in genere staticamente impossibile, tranne nel caso in cui anche la matrice completa ha rango r (problema *staticamente determinato*).
- ii. $3n > m$ e $r < m$: la struttura è *labile* e $p = m - r$ vincoli sono inefficaci. In termini statici, il problema è generalmente *staticamente impossibile*; diventa possibile, ma *staticamente indeterminato*, quando anche la matrice completa ha rango r .
- iii. $3n = m$ e $r = m$: la struttura è isostatica e il sistema è sia *staticamente* che *cinematicamente determinato*.
- iv. $3n = m$ e $r < m$: la struttura è *apparentemente isostatica*, ma effettivamente *labile* perché ci sono $p = m - r$ vincoli inefficaci. Valgono le considerazioni del punto ii.
- v. $3n < m$ e $r = 3n$: il sistema è *iperstatico* con *grado di iperstaticità* i . In termini cinematici, il relativo problema non ammette in generale soluzione per generici valori di cedimenti: i vincoli sono sovrabbondanti e impediscono gli atti di moto del sistema.

È opportuno fare alcune osservazioni:

- $3n \leq m$ è condizione solo necessaria a escludere la labilità; diventa sufficiente se $r = 3n$.
- Per una generica struttura è sempre verificata la relazione:

$$3n - m = l - i \quad (1.25)$$

- Può accadere che, per particolari condizioni di carico, sistemi labili risultino staticamente determinati o indeterminati; tale circostanza si verifica, per esempio, in quei sistemi per i quali il risultante dei momenti delle forze attive è nullo rispetto al punto di convergenza delle forze reattive. Questa importante proprietà è alla base di molte applicazioni, come, ad esempio, le *strutture pieghevoli*, cui si accennerà in seguito.

1.3. Il caso delle travature reticolari

Per *travatura reticolare* si intende un insieme di travi incernierate tra loro in corrispondenza delle estremità (dette *nodi*), di peso trascurabile e caricate solo in corrispondenza dei nodi stessi. Dall'equilibrio alla rotazione di ciascuna porzione di trave segue, pertanto, che le travi di una travatura reticolare, dette anche *aste*, sono sollecitate esclusivamente da sforzo normale.

Le strutture reticolari hanno, da sempre, trovato larghissimo impiego nella tecnica costruttiva dati gli innumerevoli vantaggi che offrono, quali l'elevata resistenza, la possibilità di ottenere schemi statici relativamente semplici e di superare luci anche molto grandi mantenendo contenuto il peso.

Quanto detto finora a proposito dell'analisi statica e cinematica di generici sistemi strutturali vale, evidentemente, anche per le travature

reticolari. In questo caso, peraltro, è possibile introdurre alcune notevoli semplificazioni. Convienne, a questo proposito, invertire il punto di vista rispetto al caso delle travature generiche: invece di considerare le aste come corpi e le cerniere come vincoli, consideriamo i vincoli come punti materiali del sistema e le aste (inestensibili) come vincoli “pendolari” che ne limitano gli spostamenti relativi. Pertanto, una travatura reticolare costituita da b aste, j nodi e m vincoli esterni può essere riguardata come un insieme di j punti materiali connessi tra loro da b pendoli. In tal modo, nel piano la struttura presenterà $2j$ gradi di libertà e sarà possibile scrivere $b + m$ equazioni di vincolo nelle $2j$ incognite costituite dagli spostamenti nodali.

Pertanto, affinché la travatura sia isostatica deve aversi:

$$b + m = 2j \quad (1.26)$$

La (1.26) è nota come *regola di Maxwell* e rappresenta una condizione necessaria affinché la travatura sia allo stesso tempo staticamente e cinematicamente determinata. Tale condizione diventa sufficiente se $r = 2j$.

Procedendo, è possibile specializzare la (1.25) al caso delle travature reticolari, ottenendo:

$$2j - b = l - i \quad (1.27)$$

È utile evidenziare che un sistema iperstatico può essere descritto come un sistema avente $i = b - r$ (≥ 0) aste *ridondanti*; se esse vengono rimosse o rese incapaci di sopportare sforzi, le altre aste non ridondanti formano un sistema staticamente determinato. Tuttavia, si può pensare all'indeterminazione statica in termini diversi: in tal senso, il sistema possiede i (≥ 0) *stati di autotensione*, ovvero un insieme di sforzi assiali che sono in equilibrio statico con carichi esterni nulli (PELLEGRINO & CALLADINE, 1986). Talvolta, le autotensioni in una struttura risultano benefiche poiché possono impartire una certa rigidezza a un meccanismo, come si vedrà più avanti.

Si ricorda, inoltre, che il grado di labilità $l = 2j - r$ (≥ 0) sta ad indicare il numero di *meccanismi inestensibili* in cui è in grado di articolarsi

un sistema cinematicamente indeterminato senza, appunto, modificare la lunghezza delle aste.

La determinazione di i e l è, in generale, un problema non banale; infatti, come TARNAI (1980) ha messo in luce, i loro valori dipendono non solo dal numero di aste e nodi, ma anche dalla topologia delle connessioni e dalla precisa geometria euclidea del sistema.

Da qui in avanti si farà sempre riferimento alle sole travature reticolari.

2.

L'ANALISI STATICO-CINEMATICA NELL'IPOTESI DI SPOSTAMENTI FINITI

2.1 Una classificazione statico-cinematica

In questo secondo capitolo si illustra come l'analisi statico-cinematica classica, basata sull'ipotesi di spostamenti infinitesimi, possa essere estesa al caso di spostamenti finiti. A questo scopo, si farà riferimento, soprattutto, ai lavori di KUZNETSOV (1999, 2000a e 2000b).

Si è già detto che, ai fini dell'analisi statico-cinematica, un sistema strutturale può essere visto come un insieme di elementi rigidi collegati fra loro ed al “suolo” da vincoli posizionali ideali. Una data configurazione di un sistema strutturale può essere descritta da due tipi di variabili: *endogene*, X_n (coordinate che individuano in maniera unica gli elementi strutturali e i punti materiali) ed *esogene*, C_i (dimensioni e distanze lineari e angolari degli elementi strutturali).

Come si vedrà, l'analisi statico-cinematica nell'ipotesi di spostamenti finiti conduce a classificare i sistemi meccanici in quattro tipi: due *ordinari* e due *singolari*. Appartengono alla prima categoria i sistemi *geometricamente invarianti* e quelli *variabili*, mentre nella seconda si collocano i sistemi *quasi-invarianti* e *quasi-variabili*. La classificazione si basa sulle proprietà cinematiche del sistema contenute in un insieme di equazioni vincolari che correlano le N coordinate generalizzate del sistema, X_n , ai parametri geometrici C_i noti del sistema:

$$F^i(X_1, \dots, X_n, \dots, X_N; C_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, C. \quad (2.1)$$

Si assume che almeno una soluzione $X_n = X_n^0$ di tali equazioni vincolari sia nota e viene presa come configurazione di riferimento.

Ulteriori informazioni si ottengono linearizzando le funzioni F^i nell'intorno della soluzione $X_n = X_n^0$:

$$F_n^i x_n = 0 \quad (2.2)$$

dove x_n sono gli incrementi infinitesimi delle rispettive coordinate, ovvero gli spostamenti virtuali del sistema, e le derivate,

$$F_n^i = \partial F^i / \partial X_n |_0 \quad (2.3)$$

sono gli elementi della matrice Jacobiana di vincolo calcolata in $X_n = X_n^0$.

Dalla (2.3) si possono ottenere le equazioni di equilibrio del sistema applicando il *principio dei lavori virtuali*:

$$F_n^i m_i = p_n \quad (2.4)$$

dove m_i rappresentano le reazioni vincolari e p_n le componenti dei carichi esterni agenti sul sistema.

Rifacendosi a quanto detto al precedente capitolo, è evidente che condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia *geometricamente invariante* è che il rango della matrice jacobiana sia $r = N$. Ciò, infatti, comporta che ogni $x_n = 0$, ovvero che il sistema non possa compiere spostamenti di alcuna entità, né infinitesimi né finiti. Nel caso in cui, invece, si abbia $r < N$, il sistema è sottovincolato e si hanno situazioni diverse a seconda della relazione tra r e C .

2.1.1 Sistemi virtualmente e cinematicamente indeterminati

Come già osservato, esistono due tipi fisicamente distinti di meccanismi inestensibili, che possono essere descritti rispettivamente come *infinitesimi* e *finiti*; di seguito si analizzeranno le principali differenze tra queste due tipologie.

Nel caso di sistema sottovincolato, essendo $r < N$, le equazioni (2.2) possono essere risolte in termini di opportuni $V = N - r$ spostamenti virtuali indipendenti; in tal caso il sistema si dice *virtualmente indeterminato* di grado V , in quanto presenta V modalità di spostamento virtuale. L'indeterminazione virtuale è, quindi, definita a partire dalle equazioni di vincolo linearizzate e comporta la mobilità infinitesima del sistema.

Un sistema si dice, invece, *cinematicamente indeterminato* se ammette mobilità finita, ovvero presenta $K \leq V$ soluzioni non banali delle equazioni non lineari (2.1); pertanto l'indeterminazione virtuale è una condizione necessaria (e quasi sempre anche sufficiente) per l'indeterminazione cinematica.

È opportuno evidenziare che un'analisi algebrica lineare, impostata per la configurazione geometrica iniziale, può individuare la presenza di meccanismi inestensibili ma non può distinguere la mobilità infinitesima da quella finita; infatti, un'analisi di questo tipo può soltanto evidenziare l'assenza di cambiamenti del primo ordine nella lunghezza delle aste, quando i nodi si muovono.

È opportuno evidenziare che il grado K di indeterminazione cinematica è un parametro globale del sistema, mentre i gradi di indeterminazione virtuale V e statica i sono locali, in quanto caratterizzano solo una data configurazione del sistema ma non il sistema stesso.

Può accadere che, nonostante si abbia mobilità virtuale ($V > 0$), la data soluzione $X_n = X_n^0$ sia un punto isolato nello spazio delle configurazioni in modo che si abbia $V > K = 0$. Un tale sistema sarebbe, pertanto, solo virtualmente mobile ma cinematicamente immobile, dunque, non permette alcuno spostamento e anche la sua mobilità virtuale è, in realtà, una proprietà puramente formale. Questi particolari sistemi sottovincolati sono *singolari* e appartengono ai due tipi degeneri *quasi-invarianti* e *quasi-variabili*; tali sistemi costituiranno l'oggetto principale del paragrafo seguente.

2.2 Configurazioni singolari dei sistemi strutturali sottovincolati

Si è già detto che una configurazione di un sistema strutturale è singolare se presenta una carenza nel rango della matrice jacobiana (e di equilibrio):

$$N > r < C \quad (2.5)$$

In termini cinematici, sistemi di questo tipo sono detti *meccanismi infinitesimi* e presentano un'unica configurazione geometrica, in quanto mancano di mobilità cinematica, ma ammettono spostamenti infinitesimi del primo ordine a spese di allungamenti di ordine superiore o uguale al secondo degli elementi strutturali.

Queste particolari configurazioni sono il risultato di una degenerazione dei due tipi ordinari; infatti, variando i parametri geometrici di un sistema geometricamente invariante si può ottenere una configurazione singolare nonostante i vincoli siano in numero sufficiente. Un sistema siffatto è detto *quasi-invariante*; l'esempio più semplice è costituito dalla travatura di von Mises: a partire da un ordinario arco a tre cerniere che è, notoriamente, geometricamente invariante, si può ottenere un sistema quasi-invariante semplicemente rendendo le tre cerniere allineate (Figura 7):



Figura 7. Configurazioni di un sistema geometricamente invariante: (a) ordinaria, invariante; (b) singolare, quasi- invariante (Kuznetsov, 1999).

Analogamente, una modifica dei parametri geometrici di sistemi geometricamente variabili può portare alla perdita della loro mobilità cinematica, dando luogo a sistemi *quasi-variabili*:

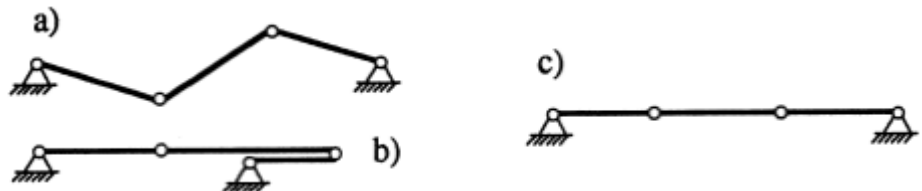


Figura 8. Configurazioni di un sistema geometricamente variabile: (a, b) ordinaria, variabile; (c) singolare, quasi- variabile (Kuznetsov, 1999).

2.2.1 La realizzabilità fisica dei sistemi strutturali singolari

2.2.1.1 Configurazioni “generiche” e “degeneri”

Si è già detto che esistono quattro tipi di sistemi strutturali, due sono “generici” e due “degeneri”, ovvero singolari. KUZNETSOV (2000a) ha proposto di analizzare i sistemi strutturali singolari sulla base della loro “realizzabilità fisica”.

I sistemi di tipo *generico* sono determinati soltanto dalla loro topologia strutturale, ovvero dal modo in cui sono collegate le aste, mentre la geometria del sistema è, in genere, irrilevante; se si variano i parametri geometrici del sistema, varia la configurazione geometrica del sistema ma la sua tipologia cinematica viene lasciata quasi sempre intatta.

Al contrario, i sistemi di tipo *singolare* sono determinati dalla geometria del sistema, specificata dall'intero insieme di variabili endogene ed esogene.

Se un sistema degenero esce da una configurazione singolare, ritorna al tipo generico da cui è stato originato, o geometricamente invariante o variabile.

Va, tuttavia, precisato che la basilare suddivisione dei modelli cinematici dei sistemi strutturali in generici e degeneri (singolari) non è completa; infatti, anche le singolarità ricadono a loro volta in due categorie: generiche e non. La distinzione tra le due tipologie di singolarità deriva dal concetto di stabilità strutturale.

2.2.1.2 La stabilità strutturale

Il problema della realizzazione fisica di una data configurazione di un sistema strutturale è che non è mai possibile conoscere i valori esatti dei parametri geometrici in una situazione reale; per questo, affinché un modello fisico sia significativo, è necessario che esso non subisca bruschi ed essenziali cambiamenti in risposta a piccole variazioni nei valori dei parametri geometrici. Un sistema che soddisfa questo requisito è detto *strutturalmente stabile*. La stabilità strutturale può, dunque, essere definita

come la capacità che un sistema possiede di mantenere il suo corrente stato di equilibrio. Dunque, solo un modello strutturalmente stabile può essere significativo, realizzabile ed osservabile come fenomeno fisico.

Il concetto di stabilità strutturale è associato a quello di computabilità, come si apprende dal *postulato di Fredkin*: “*There is a one-to-one mapping between what is possible in the real world, and what is theoretically possible in the digital simulation world*” (KUZNETSOV, 2000); ovvero, ciò che non può essere simulato su un computer, non può essere fisicamente realizzabile. Questa corrispondenza biunivoca è dovuta al fatto che anche il calcolo e, specialmente, i dati di input, presentano una precisione finita, per cui è necessario che piccole variazioni di essi non producano cambiamenti essenziali nella soluzione del problema, affinché questa abbia significato.

In primo luogo, occorre definire cosa si intende per “cambiamenti essenziali”; a tal proposito, è stata proposta (KUZNETSOV, 1999) una nozione di equivalenza topologica in termini di spostamenti virtuali: una data configurazione di un sistema è strutturalmente stabile se c'è equivalenza di spostamenti virtuali tra detta originale configurazione e un'altra ottenuta da questa a seguito di una leggera perturbazione.

In base a questo criterio, è evidente che, da un punto di vista matematico, le geometrie dei due tipi cinematici generici (invariante e variabile) sono strutturalmente stabili.

Al contrario, i due tipi cinematici degeneri (quasi-invariante e quasi-variabile) sono strutturalmente instabili e, pertanto, non potrebbero essere fisicamente realizzabili né calcolabili.

La ragione per cui ogni sistema in una configurazione degenera è instabile sta nella caratteristica analitica principale di tali configurazioni, ovvero nel deficit del rango della matrice jacobiana. Infatti, si è detto che ciò comporta l'esistenza di $V = N - r$ spostamenti virtuali indipendenti. Allora, è ovvio che una diminuzione del rango aumenterebbe il numero di tali spostamenti, escludendo la possibilità di equivalenza di spostamenti

virtuali tra la configurazione degenera e un'altra generica ad essa prossima. Ad esempio, per la travatura di von Mises (Figura 7a), nel passaggio dalla configurazione geometricamente invariante a quella singolare (Figura 7b) il grado di indeterminazione virtuale cresce da $V = 0$ a $V = 1$.

L'instabilità delle configurazioni degeneri si presenta, pertanto, sottoforma di una biforcazione virtuale che si traduce anche in una biforcazione cinematica nel caso dei meccanismi finiti.

Accertata l'instabilità di tutte le configurazioni geometriche singolari, seguirebbe chiaramente la loro impossibilità di essere realizzate; eppure, esse non solo esistono ma sono ampiamente utilizzate nella pratica ingegneristica.

Inoltre, non è detto che sistemi geometricamente invarianti si comportino sempre come stabili, ovvero insensibili a variazioni sufficientemente piccole nella forma e nelle dimensioni degli elementi.

Ad esempio, la travatura in Figura 9 presenta instabilità, pur essendo geometricamente invariante; il supporto verticale, infatti, si deformerà quando il carico di compressione raggiungerà un certo valore.

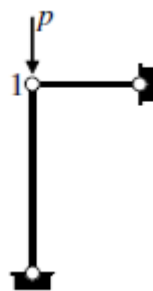


Figura 9. Sistema in uno stato di equilibrio condizionalmente stabile: il sistema non presenta instabilità solo se il carico esterno è sufficientemente piccolo (H. Deng & A.S.K. Kwan, 2005)

Per chiarire come mai accadano fenomeni di questo genere, occorre innanzitutto illustrare quali sono i fattori che influenzano la stabilità strutturale.

In primo luogo, è chiaro che il valore del carico esterno applicato ha un ruolo importante nella determinazione delle condizioni di stabilità dell'insieme; infatti, se nell'esempio di Figura 9 il carico esterno è sufficientemente piccolo, il sistema non presenta instabilità.

La stabilità strutturale dipende anche dal segno del carico agente; se il carico agente in Figura 9 è messo verso l'alto (trazione), come in Figura 10, il sistema è in uno stato di equilibrio incondizionatamente stabile.

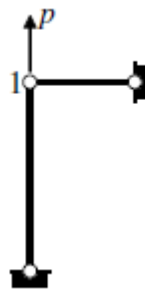


Figura 10. Sistema in uno stato di equilibrio incondizionatamente stabile (H. Deng & A.S.K. Kwan, 2005).

Ovviamente, la stabilità di un equilibrio non dipende soltanto dai carichi, ma anche dalla rigidità dei componenti del sistema; se, ad esempio, la rigidità dell'asta orizzontale del sistema in Figura 9 tende a zero, al limite in cui tale asta può essere eliminata, il sistema diventa instabile. Si precisa che togliere un'asta nel sistema o far tendere a zero la sua rigidità sono aspetti tecnicamente diversi: il primo è puramente geometrico, il secondo è fisico; tuttavia, essi producono lo stesso effetto sulla stabilità del sistema.

È importante notare, però, che non sempre si ottiene lo stesso effetto scegliendo arbitrariamente quale asta rimuovere: anche in sistemi geometricamente stabili con un numero elevato di aste ridondanti, la rimozione inopportuna di un'asta può portare al collasso della struttura.

Esistono, dunque, delle “aste necessarie” che, se rimosse, fanno perdere stabilità geometrica alla struttura, trasformandola in un meccanismo. Identificare tali aste non è, in generale, banale; un modo

sistematico, ma spesso scomodo, di procedere è quello di rimuovere ciascuna asta a turno, vedendo di volta in volta gli effetti sulla struttura.

Si può, comunque, dimostrare (DENG & KWAN, 2005) che un'asta è necessaria a mantenere la stabilità geometrica di una struttura se e soltanto se ad essa corrispondono autotensioni nulle.

Si può, dunque, concludere che la stabilità di un sistema reticolare è condizionata sostanzialmente da tre aspetti: la geometria e la topologia del sistema, la rigidità delle aste e gli sforzi interni alle aste stesse. La stabilità dei meccanismi non può essere compresa adeguatamente senza trattare tutti e tre questi aspetti; convenzionalmente, invece, l'analisi statico-cinematica si è limitata ad indagare il comportamento delle strutture reticolari solo da un punto di vista geometrico: MAXWELL (1890) definì il comportamento statico-cinematico di tali strutture attraverso una mera relazione tra il numero di nodi, aste e vincoli; PELLEGRINO & CALLADINE (1986) presero in conto anche la geometria e la topologia dell'insieme, ma solo più tardi (DENG & KWAN, 2005) si è guardato agli importanti effetti della rigidità delle aste sulla stabilità intrinseca del sistema.

Per contro, la teoria classica della stabilità strutturale si è sempre concentrata solo sull'effetto delle forze interne, senza considerare gli altri due fattori. Va notato che i primi due aspetti sono intrinseci al sistema, ma gli sforzi interni variano a seconda dei carichi esterni agenti o dell'eventuale stato di autotensione presente. Si vedrà che la capacità di ammettere uno stato di autotensione stabile è un requisito fondamentale per la stabilità interna di alcuni sistemi.

2.2.1.3 *La stabilità dei meccanismi: il ruolo della presollecitazione e dei carichi esterni*

Le strutture aventi indeterminazione cinematica, anche dette *meccanismi*, appartengono, in generale, ai sistemi geometricamente instabili.

Tuttavia, si è già evidenziata l'importante influenza degli sforzi interni alle aste sulla stabilità del sistema; per stabilizzare un meccanismo

occorre introdurre tali sforzi e ciò è possibile o per equilibrio con carichi esterni o per la presenza di autotensioni.

Infatti, se si presollecita un sistema reale si producono degli sforzi elastici nelle aste che possono, quindi, essere calcolati soltanto rimuovendo l'iniziale idealizzazione di elementi perfettamente rigidi. Pertanto, la trattazione avviene, ora, in uno spazio esteso in cui sono considerate anche le proprietà elastiche del sistema. In tal senso, la stabilità strutturale (l'assenza di cambiamenti essenziali nel sistema in seguito a piccole perturbazioni) è equivalente alla stabilità elastica (resistenza alle piccole perturbazioni). Introducendo questa nozione, sarà possibile rendere stabili in questo spazio esteso anche sistemi altrimenti instabili.

Si esamini, in primo luogo, il ruolo dei carichi esterni; è chiaro che, nonostante essi rispettino l'equilibrio (2.4), non sempre riescono a stabilizzare un meccanismo. Un esempio è il meccanismo visibile in Figura 11a, chiaramente instabile, che può essere stabilizzato invertendo il verso dei carichi esterni agenti (Figura 11b).

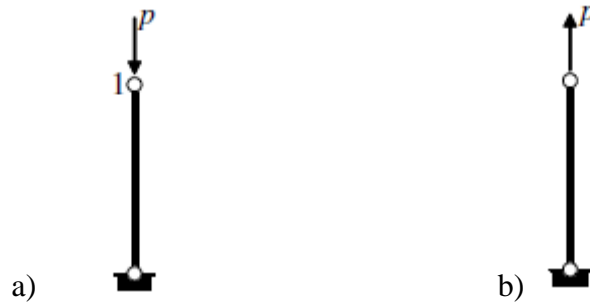


Figura 11. (a) Sistema in equilibrio instabile; (b) Sistema in uno stato di equilibrio incondizionatamente stabile (H. Deng & A.S.K. Kwan, 2005).

L'introduzione di opportuni carichi esterni è un valido modo di irrigidire meccanismi, soprattutto quando questi non ammettono uno stato di autotensione.

Uno stato di autotensione non è altro che uno stato di sforzo staticamente ammissibile in assenza di carichi esterni; ciò è possibile evidentemente solo quando il sistema omogeneo di equazioni:

$$F_n^i m_i = 0 \quad (2.6)$$

ammette almeno una soluzione non banale.

In base alla (2.5), ciò è sempre possibile per i sistemi in una configurazione singolare, dove il numero di soluzioni non banali linearmente indipendenti è proprio il grado i di indeterminazione statica della configurazione. Si fa notare che una configurazione staticamente determinata non è singolare e appartiene a uno dei due tipi generici, geometricamente invariante (se $r = N$) o variabile (se $r < N$).

Va, tuttavia, precisato che le autotensioni soluzioni delle (2.6) sono solo degli stati di tensione virtuali, puramente formali; solo se stabile uno stato di autotensione può realmente esistere come stato di presollecitazione nel sistema. Dunque, la stabilità dello stato di autotensione comporta la capacità del sistema di acquisire presollecitazione.

2.2.1.3.1 *Meccanismi infinitesimi del primo ordine*

Come si è visto in precedenza, in termini cinematici, un meccanismo infinitesimo è un sistema che possiede solamente mobilità virtuale, ma non mobilità cinematica; dunque, esso ha una configurazione unica (KUZNETSOV, 1999).

Spostamenti virtuali, infinitesimi del primo ordine sono possibili a spese di allungamenti degli elementi strutturali di ordine superiore o uguale al secondo. In base all'ordine degli allungamenti richiesti, i meccanismi infinitesimi sono classificati in meccanismi infinitesimi del primo ordine (necessitano di allungamenti del secondo ordine per produrre spostamenti infinitesimi del primo ordine), del secondo ordine e così via. Il problema della valutazione dell'ordine di mobilità infinitesima è puramente geometrico, ma sfrutta la teoria della stabilità elastica; è, comunque, un problema non banale nella pratica, fatta eccezione per alcuni semplici casi. Qui, come anticipato, ci si limiterà ad affrontare un altro aspetto relativo ai meccanismi infinitesimi: la loro realizzabilità.

Essendo configurazioni degeneri dei sistemi geometricamente invarianti e variabili, i meccanismi infinitesimi sono sempre sensibili ad

ogni minima variazione dei parametri geometrici degli elementi strutturali; ciò vuol dire che, cambiando anche di poco la lunghezza delle aste, il sistema tornerebbe al tipo generico da cui ha avuto origine. È chiaro, dunque, che essi sono instabili e, dunque, irrealizzabili; possono essere stabilizzati tramite sforzi interni, prodotti da autotensioni o carichi esterni.

Se non ci fosse l'effetto irrigidente degli sforzi interni, l'instabilità strutturale delle configurazioni singolari, compresi i meccanismi infinitesimi, richiederebbe per la loro realizzazione una precisione geometrica assoluta. Dal momento che, nelle situazioni reali, un sistema strutturale è assemblato con precisione finita, le uniche configurazioni fisicamente realizzabili sono i meccanismi infinitesimi del primo ordine che possiedono uno stato di presollecitazione di intensità finita.

La capacità del sistema di ammettere uno stato di presollecitazione costituisce una condizione sufficiente per la mobilità infinitesima e, dunque, per escludere la possibilità di spostamenti cinematici (essa è, peraltro, una condizione più semplice rispetto al verificare che la data soluzione $X_n = X_n^0$ sia un punto isolato nello spazio delle configurazioni).

La presollecitazione compensa le possibili imprecisioni che si possono creare nella realizzazione di un sistema strutturale, come le imprecisioni nelle dimensioni degli elementi, le distorsioni termiche etc. Attraverso la presollecitazione, la singolarità della configurazione è generata per via statica e non a causa dell'infattibile esattezza geometrica; la singolarità che ne risulta è generica, quindi, localmente stabile, diversamente da quella nominale.

Si può concludere che i sistemi elastici presollecitati costituiscono l'unica classe di configurazioni genericamente singolari e, quindi, realizzabili e calcolabili. Naturalmente, la stabilità è solo locale, confinata al valore finito degli sforzi elastici indotti dalla presollecitazione; alcune perturbazioni di intensità finita, come una variazione di temperatura, possono ancora produrre cambiamenti "essenziali" nelle modalità di spostamento virtuali. Tutte le altre configurazioni singolari che non

possiedono presollecitazione e, a maggior ragione, quelle che non possono essere presollecitate, sono non generiche e, pertanto, fisicamente e numericamente irrealizzabili.

Occorre, tuttavia, precisare che esistono meccanismi infinitesimi che ammettono uno stato di autotensioni stabile, ma non possono essere presollecitati in una data configurazione singolare; ciò indica che la loro singolarità è non generica.

Infatti, la possibilità di ammettere uno stato di autotensione stabile è soltanto una manifestazione statica di un fatto puramente geometrico: nella data configurazione uno dei parametri geometrici, ad esempio la lunghezza di un'asta, raggiunge un minimo, lasciando intatti gli altri parametri.

È interessante notare che lo stesso MAXWELL era consapevole dell'esistenza di strutture particolari che, pur soddisfacendo la regola (1.26), presentano $i \geq 0$ e $V \geq 0$; egli associava questo fenomeno a condizioni di massima e minima lunghezza: il comportamento di tali strutture cambia non appena gli elementi sono talmente corti da non poter essere perfettamente connessi, in assenza di allungamenti elastici, se le lunghezze diminuiscono ancora. Si guardi, ad esempio, la struttura in Figura 12: essa è composta da due sottosistemi di tre e due aste rispettivamente, incernierati al centro dell'asta inclinata. Poiché la catena composta dalle due aste è rettilinea, la configurazione del sistema è singolare.

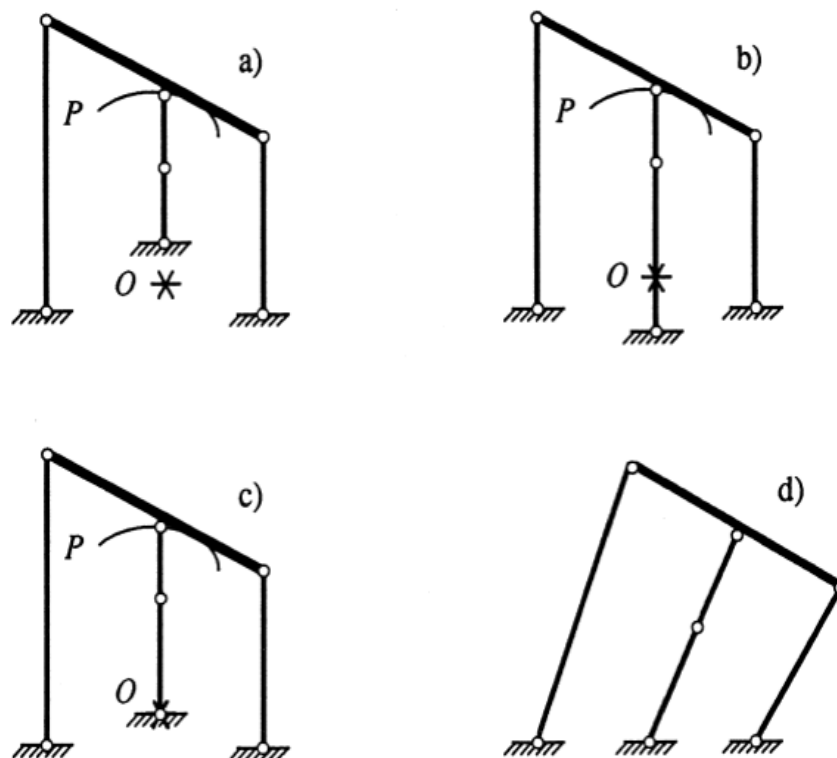


Figura 12. Trasformazioni di un meccanismo non generico: (a) meccanismo infinitesimo del primo ordine, generico e presollecitato; (b) configurazione singolare, irrealizzabile di un meccanismo finito; (c) meccanismo non generico, irrealizzabile; (d) meccanismo infinitesimo del primo ordine, generico e presollecitato (Kuznetsov, 1999).

La cerniera P di sommità che unisce i due sottosistemi tende a compiere un arco di cerchio di centro O ; se il supporto centrale si trova al di sotto del centro O (Figura 12b), le due aste della catena centrale sono così lunghe che essa non resterà rettilinea, ma compierà spostamenti cinematici nel rispetto dei vincoli. Il sistema è in una configurazione singolare, ma ammette uno stato di autotensione instabile: la singolarità è non generica, per cui la configurazione è irrealizzabile; se venisse costruita, la struttura si trasformerebbe in un meccanismo finito in una qualche configurazione generica vicina alla singolare.

Se, poi, si accorcia una delle due aste centrali, in modo che raggiunga un minimo compatibile con le lunghezze delle altre aste, la situazione cambia: se il supporto si trova sopra il centro O (Figura 12a), il sistema è un meccanismo infinitesimo del primo ordine e ammette

presollecitazione; pertanto, è strutturalmente stabile e la sua singolarità è generica, insensibile alle piccole imperfezioni. Lo stesso effetto si può ottenere se la catena delle due aste centrali non è perfettamente parallela alle due aste laterali (Figura 12d) fino a che tutte e tre si intersecano in un punto.

2.2.1.3.2 Meccanismi finiti

Inizialmente, molti autori (TARNAI, 1980; PELLEGRINO & CALLADINE, 1986) hanno investigato solo meccanismi infinitesimi del primo ordine con un solo grado di indeterminazione; successivamente, sono stati presi in considerazione anche sistemi più complessi.

Mentre un meccanismo infinitesimo causa allungamenti del secondo ordine nelle aste quando i nodi si muovono, un meccanismo finito permette ai nodi di muoversi liberamente per una distanza finita senza alcun cambiamento di lunghezza nelle aste.

Si noti, innanzitutto, che le configurazioni singolari dei meccanismi finiti sono, generalmente, strutturalmente instabili e, dunque, non generiche e irrealizzabili, in quanto non ammettono presollecitazione.

Si guardi, ad esempio, il meccanismo finito in Figura 13a: esso è una configurazione degenera di un sistema geometricamente invariante (KUZNETSOV, 1991).

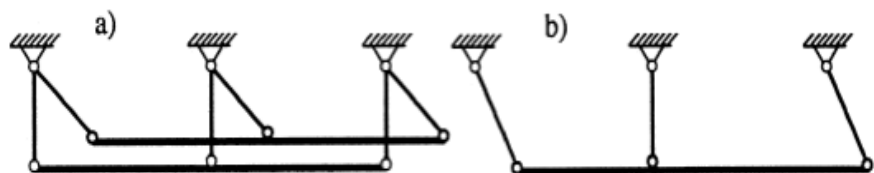


Figura 13. (a) configurazione singolare irrealizzabile di un meccanismo finito; (b) tipo generico, geometricamente invariante (Kuznetsov, 1999).

Anche la più piccola imperfezione (ad esempio, se le tre aste non sono tutte parallele, come in Figura 13b) fa tornare il sistema a uno dei possibili tipi generici: geometricamente invariante, se scarico, quasi-invariante, se presollecitato.

Dunque, la mobilità cinematica finita e la possibilità di presollecitazione sono mutuamente esclusive in una struttura; di

conseguenza, ogni sistema presollecitato può essere al massimo un meccanismo infinitesimo e, viceversa, un sistema con mobilità finita non può essere presollecitato e conserva la sua mobilità.

In conclusione, le configurazioni singolari dei sistemi strutturali con vincoli ideali sono non generiche. Diventano generiche e, quindi, realizzabili, solo attraverso mezzi statici (ma non geometrici), nello specifico attraverso una presollecitazione che induce sforzi elastici di intensità finita.

Gli unici tipi generici, fisicamente realizzabili, di configurazioni singolari sono i meccanismi infinitesimi del primo ordine, quasi-invarianti o quasi-variabili, soggetti a presollecitazione.

Tutte le altre configurazioni di sistemi strutturali sono non generiche, pertanto, irrealizzabili; tali configurazioni sono solo costrutti analitici formali e includono: i meccanismi infinitesimi che non ammettono presollecitazione; i meccanismi infinitesimi di ordine superiore al primo, compresi quelli che ammettono presollecitazione; le configurazioni singolari dei meccanismi finiti.

2.3 Cenno ai principali impieghi dei sistemi cinematicamente indeterminati: strutture tensegrali e strutture sviluppabili

In base a quanto appena detto, i sistemi cinematicamente indeterminati si suddividono in strutture presollecitate stabili e meccanismi instabili; infatti, a causa dei meccanismi interni, un sistema cinematicamente indeterminato non può mantenere uno stato di equilibrio stabile senza introdurre un iniziale stato di presollecitazione.

Alla categoria delle strutture presollecitate appartengono le *strutture tensegrali*, mentre i meccanismi instabili, in particolare quelli finiti, possono essere impiegati come *strutture sviluppabili*. Di esse si è già trattato nella Prefazione a questa tesi.

2.4 La rigidezza statico-cinematica dei sistemi strutturali sottovincolati: la matrice di rigidezza globale

Anche sotto l'ipotesi di spostamenti finiti è possibile ritrovare una dualità tra l'analisi statica e l'analisi cinematica, come verrà mostrato sinteticamente in questo paragrafo. Per approfondimenti, si rimanda ancora al lavoro di KUZNETSOV (1997).

Si è detto che un sistema strutturale sottovincolato in uno stato di equilibrio sotto l'azione di un carico esterno e/o di uno stato di presollecitazione obbedisce rispettivamente alle equazioni (2.4) o (2.6). Affinché sia staticamente ammissibile, un carico esterno, di componenti p_n , deve appartenere all'immagine della matrice di equilibrio; in questo caso il carico è detto *carico di equilibrio*, nel senso che “bilancia” e non “eccita” nessuno dei possibili meccanismi inestensibili (VILNAY, comunicazione privata).

Gli elementi strutturali subiscono, in generale, degli allungamenti che possono essere interpretati in termini di cedimenti d_i dei vincoli; pertanto, ricordando le equazioni di vincolo (2.2), le relazioni cinematiche tra gli d_i e gli spostamenti x_n del sistema sono le seguenti:

$$F_n^i x_n = d_i \quad (2.7)$$

Se gli allungamenti sono elastici, è possibile metterli in relazione con i rispettivi sforzi nelle aste attraverso i legami costitutivi:

$$m_i = S_{ij} d_j \quad (2.8)$$

S_{ij} è la matrice diagonale delle rigidzze delle aste.

Sostituendo le (2.7) e (2.8) nelle equazioni di equilibrio (2.4), si perviene alla relazione:

$$E_{mn} x_n = p_n \quad (2.9)$$

dove E_{mn} è la *matrice di rigidzza elastica* del sistema e ha lo stesso rango r della matrice F_n^i ; pertanto, per un sistema strutturale sottovincolato ($r < N$) la matrice di rigidzza elastica è singolare.

Questo è un segno di inadeguatezza del modello elastico lineare; infatti, fisicamente la singolarità della matrice di rigidzza elastica comporta

che il sistema non può sopportare determinate condizioni di carico senza compiere ampi spostamenti.

Si è già detto che uno stato di sforzo pre-esistente impartisce ai sistemi sottovincolati una certa quota di rigidità.

Quando questo iniziale stato di sforzo è assente, è spontaneo chiedersi se un sistema sottovincolato è in grado di sopportare un determinato carico esterno e, se sì, in che modo.

Per rispondere, bisogna prima introdurre un importante concetto: non tutti i carichi esterni appartengono all'immagine della matrice di equilibrio, dunque non tutti i carichi sono *carichi di equilibrio*. Da questa definizione, infatti, discende che il numero di carichi di equilibrio indipendenti è uguale al rango r della matrice di equilibrio; pertanto, solo per i sistemi geometricamente invarianti ($r = N$) ogni carico è un carico di equilibrio.

In generale, un dato carico esterno può essere scomposto in due vettori di carico: uno (p_n^*) che si trova nell'immagine della matrice di equilibrio, e l'altro (P_n), ortogonale al primo, detto *carico perturbante* (KUZNETSOV, 1991):

$$p_n = p_n^* + P_n, \quad p_n^* P_n = 0 \quad (2.10)$$

Un carico di equilibrio può essere bilanciato dal sistema in una data configurazione senza produrre alcuno spostamento (sempre nell'ipotesi che i vincoli siano ideali). Esso è, tuttavia, solo un carico staticamente ammissibile: rispetta l'equilibrio, anche se questo non è necessariamente stabile.

Al contrario, sotto l'azione di un carico perturbante l'equilibrio nella configurazione originale è impossibile e gli spostamenti sono inevitabili, indipendentemente dalle proprietà elastiche del sistema. Infatti, un carico perturbante può generare due possibili effetti: o produce reazioni vincolari infinite (in sistemi con mobilità infinitesima), oppure mette in moto il sistema.

Il motivo è che il carico perturbante e gli spostamenti inestensibili sono nel nucleo della matrice di rigidezza elastica; essendo, questa, singolare per i sistemi sottovincolati, non c'è un'unica soluzione in termini di spostamenti.

Si riprendano, ora, le condizioni di equilibrio (2.4) e si immagini di riscriverle in forma variazionale, ovvero in una configurazione deformata rispetto a quella iniziale:

$$F_{nm}^i m_i x_m + F_n^i \lambda_i = \delta p_n \quad (2.11)$$

Qui, λ_i corrispondono a piccoli incrementi delle rispettive reazioni vincolari, δp_n rappresenta un carico esterno addizionale che viene assunto arbitrario e gli F_{nm}^i sono i termini della matrice Hessiana ottenuta dall'insieme delle equazioni vincolari del sistema:

$$F_{nm}^i = \partial^2 F^i / \partial X_m \partial X_n |_0 \quad (2.12)$$

La matrice simmetrica:

$$K_{mn} = F_{nm}^i m_i \quad (2.13)$$

è detta *matrice di rigidezza statico- cinematica* (KUZNETSOV, 1997).

Tale matrice ha natura puramente statico- cinematica: è determinata solo dalla geometria corrente del sistema e dagli sforzi prodotti nelle aste dalla parte di equilibrio del carico esterno applicato.

La matrice K_{mn} mette, dunque, in luce il fatto che la parte di equilibrio del carico esterno costituisce per il sistema una fonte di resistenza alla parte di perturbazione dello stesso carico; questo è, infatti, il reale meccanismo fisico che rende un sistema sottovincolato capace di sopportare un generico carico.

A questo punto è possibile introdurre per un sistema sottovincolato la *matrice di rigidezza globale* (KUZNETSOV, 1997):

$$C_{mn} = E_{mn} + K_{mn} \quad (2.14)$$

Essa rappresenta la forma più generale di matrice di rigidezza tangente per un'analisi lineare; infatti, essa combina le due fonti di rigidezza strutturale del primo ordine, quella elastica e quella statico- cinematica.

Per un sistema geometricamente invariante la rigidezza elastica è predominante e la matrice tangente di rigidezza elastica è non singolare, per cui è tollerabile commettere errori anche grossolani nel quantificare la rigidezza statico- cinematica del sistema.

La situazione per i sistemi sottovincolati è, invece, diametralmente opposta: qui la matrice di rigidezza statico- cinematica è l'unica fonte di resistenza del sistema ai carichi perturbanti. Infatti, essa rimedia alla singolarità della matrice di rigidezza elastica, fornendo una soluzione nel suo nucleo (il sottospazio degli spostamenti inestensibili).

In questi casi, dunque, è necessario valutare accuratamente la matrice K_{mn} ; a tale fine, occorre determinare in primo luogo gli sforzi interni alle aste, prodotti dalla parte di equilibrio del carico applicato nella configurazione corrente.

3.

ESEMPIO ILLUSTRATIVO: ANALISI DI UNA STRUTTURA RETICOLARE PIANA

A titolo di esempio, è stata considerata la struttura reticolare piana mostrata in Figura 14, composta da due triangoli simili tra loro collegati da tre aste verticali.

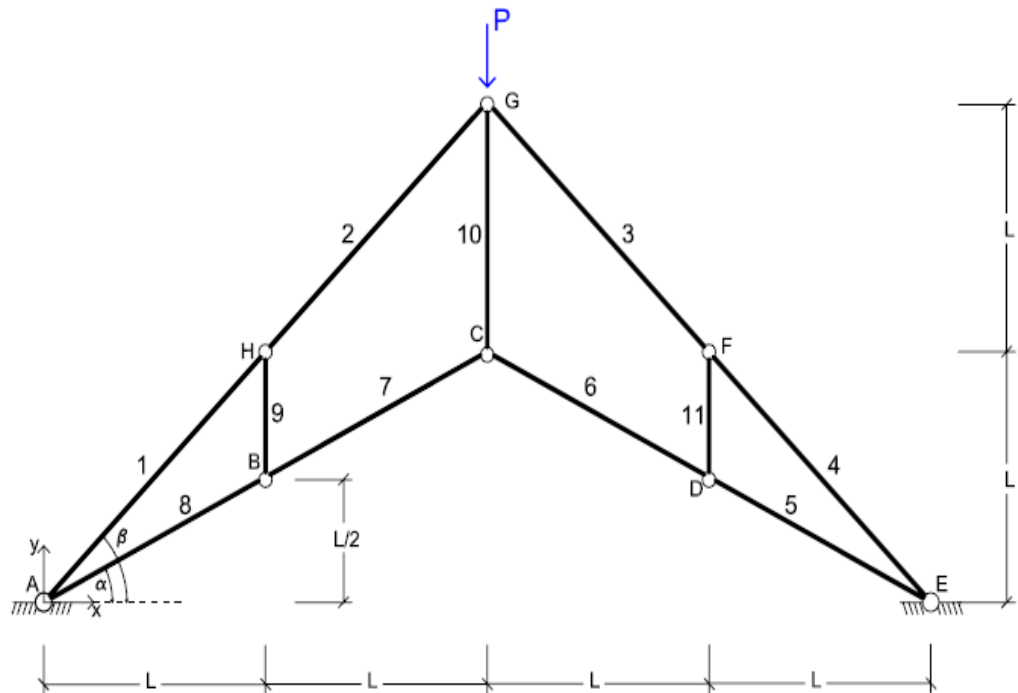


Figura 14. Sistema reticolare piano sottovincolato (quasi- variante).

Poiché, in assenza delle aste, ciascun nodo, eccetto i nodi A ed E, sarebbe libero di muoversi nel piano, la geometria del sistema è definita dalle $N = 12$ coordinate dei sei nodi non vincolati al suolo. Tali coordinate costituiscono, pertanto, le componenti del vettore \mathbf{u} delle incognite cinematiche del problema:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} X_H \\ Y_H \\ X_G \\ Y_G \\ X_F \\ Y_F \\ X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \\ X_B \\ Y_B \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Il numero di vincoli, invece, è pari alle $C = 11$ aste; dunque, il sistema è sottovincolato.

La matrice cinematica del sistema sarà, pertanto, una matrice rettangolare (11 x 12); per costruirla, è opportuno notare che per un sistema reticolare con vincoli ideali in una nota configurazione geometrica non è necessario scrivere esplicitamente tutte le equazioni vincolari. Si è già osservato, infatti, che nei sistemi reticolari le aste agiscono come vincoli pendolari che limitano lo spostamento dei nodi nel piano; dunque, le equazioni di vincolo sono espresse dalla condizione di inestensibilità delle aste:

$$\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = L_i \quad (3.2)$$

Qui L_i rappresenta la lunghezza della i -esima asta mentre ΔX e ΔY sono le distanze rispettivamente in direzione x e in direzione y dei nodi di estremità della stessa asta:

$$\Delta X = X_{finale} - X_{iniziale} = L_x \quad (3.3)$$

$$\Delta Y = Y_{finale} - Y_{iniziale} = L_y \quad (3.4)$$

A questo punto, i coefficienti della matrice cinematica si ottengono dalle (2.3), ovvero linearizzando le equazioni di vincolo (3.2); in tal modo, la matrice cinematica assume il significato di matrice Jacobiana di vincolo e i suoi generici elementi coincidono con i coseni direttori delle rette

contenenti le corrispondenti aste (avendo indicato con θ_x e θ_y rispettivamente gli angoli che ciascuna di tali rette forma con l'asse x e con l'asse y):

$$L_x/L = \pm \cos \theta_x \quad (3.5)$$

$$L_y/L = \pm \cos \theta_y \quad (3.6)$$

Ad esempio, si può scrivere l'equazione vincolare per l'asta 1, tenendo presente che si avrà:

$$\Delta X_I = X_H - X_A = L \quad (3.7)$$

$$\Delta Y_I = Y_H - Y_A = L \quad (3.8)$$

Allora, il coefficiente della matrice cinematica che andrà a moltiplicare l'incognita X_H è:

$$\partial F^I / \partial X_H = \frac{1}{2} \frac{2(X_H - X_A)}{\sqrt{(X_H - X_A)^2 + (Y_H - Y_A)^2}} = \frac{L_1 \cos \beta}{L_1} = \cos \beta \quad (3.9)$$

Procedendo in questo modo anche per le altre aste, si ottiene la matrice cinematica C (Tabella1):

$\cos \beta$	$\sin \beta$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\cos \beta$	$-\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \beta$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-\cos \beta$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$-\sin \beta$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-\cos \beta$	$\sin \beta$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0

Tabella 1. Matrice Jacobiana di vincolo.

Parallelamente, si consideri, ora, il problema statico associato alla travatura in esame; esso sarà espresso dal sistema di equazioni (1.4), in cui il vettore delle incognite statiche \mathbf{x} è costituito dagli sforzi nelle 11 aste componenti il sistema:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \\ N_{11} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

La matrice di equilibrio \mathbf{S} , invece, coinciderà con la trasposta della matrice \mathbf{C} , come osservato nel capitolo 1.

Ci si può convincere facilmente di ciò scrivendo l'equilibrio alla traslazione dei sei nodi non vincolati al suolo; ad esempio, dall'equilibrio alla traslazione orizzontale del nodo H si ottiene:

$$N_1 \cos \beta - N_2 \cos \beta = 0 \quad (3.11)$$

I coefficienti della (3.11) costituiscono la prima riga della matrice statica \mathbf{S} e coincidono palesemente con i coefficienti della prima colonna della matrice \mathbf{C} .

Numericamente, nel caso in esame $\alpha = \arctan(1/2) = 26,57^\circ$ e $\beta = 45^\circ$, per cui le matrici \mathbf{C} e \mathbf{S} sono quelle riportate in Tabella 2 e Tabella 3 rispettivamente.

0,707	0,707	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,707	-0,707	0,707	0,707	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0,707	0,707	0,707	-0,707	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0,707	0,707	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0,894	0,447	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,894	-0,447	-0,894	0,447	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0,894	0,447	-0,894	-0,447
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,894	0,447
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0

Tabella 2. Matrice Jacobiana di vincolo: valori numerici.

0,707	-0,707	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,707	-0,707	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0,707	-0,707	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,707	0,707	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0,707	-0,707	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0,707	0,707	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	-0,894	0,894	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0,447	-0,447	0	0	0	0	0	-1
0	0	0	0	0	-0,894	0,894	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0,447	0,447	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	-0,894	0,894	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0,447	0,447	-1	0	0	0

Tabella 3. Matrice statica: valori numerici.

Si può notare che il rango della matrice C è, quindi, della matrice S è $r = 10$; in particolare, da un punto di vista algebrico ciò implica che il nucleo $Ker(S)$ della matrice S ha dimensione $C - r = 1$, ovvero che il sistema presenta $i = C - r = 1$ stato di autotensione staticamente ammissibile che, per definizione, è uno stato di tensione in equilibrio con carichi esterni nulli.

Per valutare l'intensità di questo stato di autotensione, è possibile assumere l'autotensione dell'asta 10 come parametro indipendente e trovare di conseguenza le autotensioni nelle altre aste. Si procede nel modo seguente: si eliminano due righe dalla matrice di equilibrio (Tabella 3), ad esempio la quinta e la undicesima, in modo da ottenere $r = 10$ righe linearmente indipendenti, poi, assumendo unitario il valore dell'autotensione nell'asta 10, si sposta al lato dei termini noti la decima

colonna della matrice appena ottenuta. In questo modo ci si riconduce ad un sistema quadrato la cui matrice dei coefficienti (10 x 10) è invertibile; la soluzione del sistema rappresenta il vettore \mathbf{a} (11 x 1) dello stato di autotensione del sistema:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} -0,707 \\ -0,707 \\ -0,707 \\ -0,707 \\ 1,118 \\ 1,118 \\ 1,118 \\ 1,118 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Il valore unitario dell'autotensione m_{10} nell'asta 10 funge, dunque, da riferimento per ricavare i restanti sforzi m_i , in modo che:

$$m_i = a_{i10} m_{10} \quad (3.13)$$

È opportuno sottolineare che, in virtù della già citata dualità statico-cinematica, il vettore \mathbf{a} rappresenta anche gli allungamenti delle aste che sono proibiti dalla compatibilità geometrica del sistema (PELLEGRINO & CALLADINE, 1986). Questi allungamenti proibiti d_{ik}^\perp sono ortogonali agli allungamenti compatibili con i vincoli che appartengono, infatti, all'immagine della matrice Jacobiana di vincolo \mathbf{C} .

Si consideri, ora, la condizione di carico di Figura 14 in cui il nodo G è caricato verticalmente da un carico \mathbf{P} ; se si assume che \mathbf{P} sia unitario, il vettore dei carichi esterni ha come unica componente non nulla $P_4 = -1$.

Si può facilmente verificare che si tratta di un carico di equilibrio, in quanto appartiene all'immagine della matrice \mathbf{S} . Si vogliono, ora, calcolare gli sforzi presenti nelle aste sotto questa condizione di carico. Siccome il sistema è staticamente indeterminato, occorre introdurre le proprietà

elastiche dei membri strutturali e ridursi prima ad un sottosistema staticamente determinato, ovvero con r aste. A tal fine si immagina che l'asta 10 sia scarica e si risolve, così, il problema statico (1.4) la cui matrice dei coefficienti è la (10×10) trovata in precedenza e il vettore dei termini noti è costituito dal carico assegnato. Risolvendo, si ottiene:

$$\mathbf{x}^r = \begin{Bmatrix} -0,707 \\ -0,707 \\ -0,707 \\ -0,707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Come ci si poteva aspettare, in questo sottosistema il carico esterno è bilanciato dalla sola catena superiore, interamente compressa.

Se si indicano con d_i^r le deformazioni indotte dal carico di equilibrio assegnato nel sottosistema staticamente determinato suddetto, la condizione di ortogonalità tra gli allungamenti compatibili e quelli proibiti può essere scritta come segue:

$$(d_i^r + d_i) d_{ik}^\perp = 0 \quad (3.15)$$

Qui d_i sono le deformazioni dovute all'effettivo sforzo, ancora incognito, nell'asta 10. Se il materiale costituente le aste è elastico lineare, gli allungamenti sono legati ai corrispondenti sforzi nelle aste dai legami costitutivi (2.8) che possono essere riscritti nella forma inversa:

$$d_i = D_{ij} m_j, \quad D_{ij} = (L/EA)_{ii} \quad (3.16)$$

D_{ij} sono gli elementi della *matrice diagonale di cedevolezza*, funzioni della lunghezza dell' i -esima asta e della sua rigidezza estensionale

EA . A questo punto, sostituendo le (3.16) nelle (3.15), tenendo conto delle (3.13), si ricava:

$$D_{ij} (m_j^r + a_{j10} m_{10}) a_{i10} \quad (3.17)$$

Il sistema di equazioni (3.17), in cui m_j^r sono gli sforzi (3.14) presenti nel sottosistema staticamente determinato scelto, permette di valutare lo sforzo m_{10} dell'asta 10, scelto come indipendente, dal quale si ricavano gli sforzi nelle altre aste:

$$m_i = m_i^r + a_{i10} m_{10} \quad (3.18)$$

Va evidenziato che questa procedura è del tutto generale per l'analisi di un qualsiasi sistema strutturale staticamente indeterminato, sia esso geometricamente invariante o sottovincolato.

Nel particolare caso in esame, se si suppone che le aste della catena superiore hanno la stessa rigidezza EA di quelle della catena inferiore e che le aste verticali sono inestensibili, la matrice diagonale di cedevolezza risulta:

$$\frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,118 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,118 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,118 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,118 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabella 4. Matrice diagonale di cedevolezza.

A questo punto, applicando la (3.17) si ricava che lo sforzo nell'asta 10 è $m_{10} = -0,336$ e, conseguentemente, è possibile ottenere gli sforzi prodotti dal carico applicato nelle restanti aste, attraverso la (3.18).

Dunque, approssimando, anche qui, alla terza cifra decimale, si ricava:

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} -0,470 \\ -0,470 \\ -0,407 \\ -0,407 \\ -0,376 \\ -0,376 \\ -0,376 \\ 0 \\ -0,366 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

La soluzione così trovata è esatta, in quanto il carico esterno è un carico di equilibrio; tuttavia, è probabile che questo stato di sforzo sia instabile, essendo compresse tutte le aste.

Per un generico carico esterno non è possibile trovare una soluzione esatta; la migliore approssimazione lineare si ottiene applicando la sola parte di equilibrio del carico assegnato (KUZNETSOV, 1997).

Riprendendo, ora, il problema cinematico, il fatto che il rango della matrice \mathbf{C} sia $r = 10$ comporta che il sistema presenta $V = N - r = 2$ spostamenti virtuali indipendenti. Questi spostamenti appartengono al nucleo $\text{Ker}(\mathbf{C})$ della matrice \mathbf{C} , in quanto soluzioni indipendenti e non banali del sistema cinematico omogeneo.

Per ricavare questi spostamenti, si procede in maniera duale rispetto a quanto fatto per il calcolo delle autotensioni: prendendo come spostamenti indipendenti quello orizzontale del nodo F e quello orizzontale del nodo B, si trasferiscono al secondo membro le colonne della matrice \mathbf{C} corrispondenti a questi spostamenti (la quinta e la undicesima); in questo modo, si ottiene una matrice (11 x 10) con tutte le colonne indipendenti, per cui, eliminando una riga dipendente dalle altre (ad esempio, la prima), si ottiene un sistema quadrato la cui matrice dei coefficienti (10 x 10) è invertibile. Risolvendo il sistema, si ottiene la matrice (12 x 2) degli spostamenti virtuali indipendenti (3.20).

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Si noti che gli spostamenti 5,11, presi come indipendenti, sono stati generati utilizzando la matrice identità.

Inoltre, sempre rifacendosi alla dualità statico-cinematica, si può affermare che la matrice (3.20) rappresenta anche i carichi perturbanti, ovvero quelle condizioni di carico “proibite”, in quanto andrebbero ad “eccitare” gli spostamenti non accompagnati da allungamenti delle aste; si osserva facilmente quanto detto in precedenza: ogni carico perturbante è ortogonale a ciascun carico di equilibrio, in particolare a quello scelto in Figura 14.

È opportuno concludere con qualche osservazione: si è visto come, attraverso semplici considerazioni algebriche, è possibile associare alle matrici \mathbf{C} ed \mathbf{S} quattro sottospazi vettoriali fondamentali per l’analisi statico-cinematica di un sistema qualsiasi (PELLEGRINO & CALLADINE, 1986). Il primo di essi è il sottospazio di dimensione r composto da tutti gli sforzi nelle aste che bilanciano i carichi di equilibrio; in maniera duale, questo sottospazio è costituito dagli r insiemi di allungamenti delle aste geometricamente compatibili. Il secondo importante sottospazio è il nucleo della matrice statica $\text{Ker}(\mathbf{S})$, costituito, come si è visto, dagli i stati di

autotensione del sistema; in termini cinematici, $Ker(S)$ contiene gli allungamenti assiali non compatibili con la geometria del sistema. Il terzo sottospazio è costituito dall'immagine della matrice S , generato dagli r possibili carichi che il sistema può equilibrare nella configurazione iniziale; l'interpretazione cinematica di questo sottospazio permette di affermare che esso contiene tutte le possibili modalità di deformazione che escludono meccanismi inestensibili. Infine, il quarto importante sottospazio è il nucleo della matrice cinematica $Ker(C)$, generato, come già visto, da V meccanismi inestensibili indipendenti, ovvero, in maniera duale, dalle V condizioni di carico perturbante. Si può facilmente dimostrare che i primi due sottospazi sono uno il complemento ortogonale dell'altro, così come accade per il terzo e il quarto.

Inoltre, la struttura esaminata permette anche ulteriori osservazioni: rappresentando, infatti, una configurazione quasi-variabile di un sistema sottovincolato, essa costituisce un meccanismo infinitesimo, i cui possibili spostamenti virtuali sono dati, appunto, dalla (3.20). In quanto singolare, il sistema presenta, come si è visto, anche indeterminazione statica; ciò comporta l'esistenza di i possibili stati di autotensione e proprio questa proprietà rappresenta la chiave per la possibile realizzazione del sistema. Infatti, se stabili, tali stati di autotensioni rendono il sistema capace di sopportare qualsiasi carico esterno, anche quando questo è libero di distorcersi seguendo i suoi possibili meccanismi inestensibili, purché infinitesimi.

Con questo si vuole sottolineare come le strutture cinematicamente indeterminate costituiscano non solo interessanti costrutti teorici, ma anche sistemi ingegneristici di rilievo, oggetto di importanti ricerche attuali e, auspicabilmente, future.

BIBLIOGRAFIA

- CAWSEY, T.R. (1982): A Deployment Mechanism for the Double Roll-Out Flexible Solar Array on the Space Telescope, *Proceedings of the 16th Aerospace Mechanisms Symposium*. NASA CP-2221.
- CHEN, Yao; FENG, Jian; ZHANG, Yuting (2014): A necessary condition for stability of kinematically indeterminate pin-jointed structures with symmetry, *Mechanics Research Communications*, **60**, 64-73.
- DENG, H.; KWAN, A.S.K. (2005): Unified classification of stability of pin-jointed bar assemblies, *Int. J. of Solids and Structures*, **42**, 4393-4413.
- FULLER, Richard Buckminster (1962): *Tensile- Integrity Structures*, United States Patent 3.063.521.
- KÖTTER, E. (1912): Über die Möglichkeit, n Punkte in der Ebene oder im Raume durch weniger als $2n - 3$ oder $3n - 6$ Stäbe von ganz unveränderlicher Länge unverschieblich miteinander zu verbinden, *Festschrift Heinrich Müller- Breslau*, A. Kröner, Ed. Leipzig, 61- 80.
- KUZNETSOV, E.N. (1991): *Underconstrained Structural Systems*, Springer- Verlag, New York.
- KUZNETSOV, E.N. (1997): Orthogonal load resolution and statical-kinematic stiffness matrix, *Int. J. of Solids and Structures*, **34**, 3657-3671.
- KUZNETSOV, E.N. (1999): Singular configurations of structural systems, *Int. J. of Solids and Structures*, **36**, 885-897.
- KUZNETSOV, E.N. (2000): On the evaluation of statical-kinematic stiffness matrix for underconstrained structural systems, *Int. J. of Solids and Structures*, **37**, 2215-2223.
- KUZNETSOV, E.N. (2000): On the physical realizability of singular structural systems, *Int. J. of Solids and Structures*, **37**, 2937-2950.
- MAXWELL, James Clerk (1890): On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames, *Scientific Papers of J.C. Maxwell*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- MÖBIUS, August Ferdinand (1837): Lehrbuch der Statik *Tensegrity*, **2**, Leipzig.
- MOTRO, Renè (2003): *Tensegrity: Structural Systems for the Future*, Kogan Page Science, London.
- PELLEGRINO, Sergio; CALLADINE, Chris R. (1986): Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks, *Int. J. of Solids and Structures*, **22**, 409-428.
- PELLEGRINO, Sergio; CALLADINE, Chris R. (1991): First-order infinitesimal mechanisms, *Int. J. of Solids and Structures*, **27**, 505-515.
- PUGH, Anthony (1976): An introduction to tensegrity, *University of California Press*, Berkeley, CA, USA.

RABINOVICH, I.M. (1962): Hanging Roofs, *Stroiizdat*, Moscow.

VILNAY, O. (1981): Determinate tensegric shells, *ASCE Journal of the Structural Divisions*, **107**, 2029-2033.